

الماهر

فه

دريشة

الرياضيات

للف الثاني الإعدادي

الفصل الدراسي الأول

يطلب من : مكتبة النجاح - مؤسسة الكتب الذهبية / بالفجالة

الدعم الفني ☎ ٠٢/٢٣٩٥٠٠١٣ - ٠١١٣٩٥٠٠١٣

وللاقتراحات ☎ ٢٣٩٥٠٠١٣ / ٠١٠١٥٠٨٠٠٥ ص.ب: ١٢ الدواوين - القاهرة

أو على موقعنا

WWW.ELMAHER.org

الموضوع	صفحة	الموضوع	صفحة
● الجبر ●		● الهندسة ●	
مراجعة على ما سبق	٥	متوسطات الثلاث	١٨٤
الجذر التكعيبي للعدد النسبي	١٨	متوسط الثلاث القوائم	١٩٥
مجموعة الأعداد غير النسبية	٢٨	الثلاث المتساوي الساقين	٢١٠
مجموعة الأعداد الحقيقية	٤٢	عكس نظرية الثلاث المتساوي الساقين	٢٢٤
العمليات على الأعداد الحقيقية	٥٤	نتائج على نظريات الثلاث المتساوي الساقين	٢٣٨
العمليات على الجذور التربيعية	٦٤	التبعاين	٢٥٢
العمليات على الجذور التكعيبية	٧٦	المقارنة بين زوايا الثلاث	٢٦٠
تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية	٨٣	المقارنة بين أطوال الأضلاع	٢٧١
حل المعادلات والتباينات	٩٨	متباينة الثلاث	٢٨٣
العلاقة بين مستقيمين	١١٢		
ميل الخط المستقيم	١٢٤		
تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم	١٣٢		
● الإحصاء ●			
جمع البيانات وتنظيمها	١٤٤		
الجدول التكراري التجميع	١٥٠		
مقاييس النزعة المركزية	١٥٨		
الوسيط	١٦٥		
المتوسط	١٧٤		

الحمد لله الذي وفقني وأعانني وتعالى الطريق كي أستطيع أن أنجز هذا الكتاب بصورته هذه لأقدمه إلى أبنائي الطلاب وإلى زملائي أساتذة الرياضيات أملاً أن يجدوا فيه العون على أداء رسالتهم بكل ثقة ونجاح. وأسأل الله العلي القدير أن يحوز هذا الكتاب على تقديركم وثقتكم التي اعتر بها. فقد روعى أن يتضمن الكتاب الاهتمامات المتنوعة للقاعدة العريضة من الطلاب والمعلمين وأولياء الأمور وذلك من خلال:

- عرض المادة بطريقة مبسطة وشيقة.
- أمثلة توضيحية لأهم ما يجب التعرف عليه والتي تشمل الأفكار المختلفة لجميع أجزاء المنهج.
- أمثلة للتدريب نصف محلولة ليتدرب الطالب على كيفية الحل.
- التمارين الوهيرة والمتدرجة التي تناسب كل المستويات مشتملة على أفكار كتاب الوزارة.
- وقد تم تقسيمها إلى ثلاثة أجزاء.
- أولاً: راجع معنا واختبر نفسك وهي ما نتفرد به لجعل الطالب في مراجعة مستمرة في صورة اختبار مع كل درس جديد.

ثانياً: اجب عما يأتي وهي التمارين المتدرجة وهي مستويات ثلاثة مختلفة

- مسائل المستوى الأول - وتعتبر أسئلة تمهيدية ومباشرة تفهم الدرس.
- مسائل المستوى الثاني - وهي مسائل الامتحانات وما في مستواها وهي في مستوى الطالب المتوسط وفوق المتوسط. مع أفكار مختلفة يجب أن يلم بها الطالب.
- أسئلة الطلاب المتفوقين وهي لتنمية التفكير والإبداع لدى الطلاب.
- امتحانات وفيرة ليتدرب الطلاب على حلها.

أسأل الله العون والتوفيق

المؤلف



الجذر التكعيبي للعدد النسبي

سبق أن تعلمنا أن حجم المكعب = طول الحرف × نفسه × نفسه وحدة مكعبة
 أي أن حجم مكعب طول حرفه ٥ = ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥
 والعكس إذا كان لدينا مكعب حجمه ٢٧ ونريد معرفة طول حرفه فكيف نوجده ؟
 بالطبع لايجاد ذلك فإننا نبحث عن عدد س بحيث س × س × س يساوي ٢٧
 ولايجاد هذا العدد نحلل ٢٧ إلى عوامله الأولية كما بالشكل
 أي أن ٢٧ = ٣ × ٣ × ٣
 ∴ المكعب الذي حجمه ٢٧ يكون طول حرفه ٣
 نلاحظ أن "العدد الذي نضربه في نفسه في نفسه ليكون الناتج ٢٧ هو ٣"
 ويمكن الاستغناء عن هذه الجملة بعبارة أخرى رياضية وهي "الجذر التكعيبي للعدد ٢٧ هو ٣"
 وتكتب رياضياً $\sqrt[3]{27} = 3$ ومن ذلك يمكن تعريف الجذر التكعيبي لعدد نسبي كما يلي:

تعريف

الجذر التكعيبي للعدد النسبي a هو العدد الذي مكعبه يساوي a
 ويرمز للجذر التكعيبي للعدد النسبي a بالرمز $\sqrt[3]{a}$

وعلى ذلك فإن $3 = \sqrt[3]{27}$ لأن $27 = 3^3$
 $2 = \sqrt[3]{8}$ لأن $8 = 2^3$

ملاحظات

- الجذر التكعيبي للعدد a يكون موجباً إذا كان a عدد موجب ويكون الجذر التكعيبي للعدد a سالباً إذا كان a عدد سالب
- أي أن الجذر التكعيبي لأي عدد يكون له نفس إشارة هذا العدد
- $\sqrt[3]{-1} = -1$ ، $\sqrt[3]{1} = 1$ ، $\sqrt[3]{-8} = -2$ ، $\sqrt[3]{8} = 2$
- $\sqrt[3]{-27} = -3$ ، $\sqrt[3]{27} = 3$ ، $\sqrt[3]{-125} = -5$ ، $\sqrt[3]{125} = 5$



- $\sqrt[3]{1} = 1$ ، $\sqrt[3]{-1} = -1$ ، فمثلاً $\sqrt[3]{1} = 1$ لأن $1 = 1 \times 1 \times 1$
- العدد النسبي له جذر تكعيبي واحد وهو عدد نسبي أيضاً
- لايجاد الجذر التكعيبي للعدد النسبي المكعب الكامل :
 ① يمكن تحليل العدد إلى عوامله الأولية
 ② يمكن استخدام الآلة الحاسبة



أمثلة توضيحية

استخدم التحليل لايجاد قيمة ما يأتي مع التحقق من صحة الإجابة باستخدام الآلة الحاسبة :

① $\sqrt[3]{64}$ ② $\sqrt[3]{-216}$ ③ $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$

الحل

نحلل كل عدد إلى عوامله الأولية

① $\sqrt[3]{64} = 4$ لأن $64 = 2^6 = 2^3 \times 2^3 = 4^3$
 ② $\sqrt[3]{-216} = -6$ لأن $216 = 2^3 \times 3^3 = 6^3$
 ③ $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$ لأن $\frac{125}{8} = \frac{5^3}{2^3} = (\frac{5}{2})^3$

ويمكن التحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة كما يلي :

shift $\sqrt[3]{}$ 6 4 = 4

وبنفس الطريقة يمكن التأكد من كل النتائج



$$\therefore \frac{1}{5} \text{ س} = 2 + 21 = 23$$

(نضرب الطرفين $\times 5$)

$$\therefore \text{س} = 115$$

$$\therefore \text{س} = 5$$

$$\therefore \{5\} = \text{ح.م.}$$

$$\textcircled{2} \therefore \frac{1}{5} \text{ س} = 4 - 21 = -17$$

$$\therefore \frac{1}{5} \text{ س} = -17$$

$$\therefore 5 \times 25 = 5 \times \frac{1}{5} \text{ س} = -85$$

$$\therefore \text{س} = -17$$

أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في 5:

$$\textcircled{1} (2 - \text{س}) - 1 = 15$$

$$\textcircled{2} 8 = (3 + \text{س})^2$$

الحل

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$\textcircled{1} \therefore (2 - \text{س})^3 = 15^3$$

$$\therefore 2 - \text{س} = \sqrt[3]{15^3}$$

$$\therefore 2 - \text{س} = 15$$

$$\therefore \text{س} = -13$$

$$\therefore 2 - \text{س} = -13$$

$$\therefore 15 + 12 = (2 - \text{س})^3$$

$$\textcircled{2} \therefore (2 - \text{س})^3 = 15^3$$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$\therefore 2 - \text{س} = \sqrt[3]{15^3}$$

$$\therefore 2 - \text{س} = 15$$

$$\therefore 2 - \text{س} = -13$$

$$\therefore \text{س} = -13$$

$$\therefore 2 - \text{س} = -13$$

أوجد طول حرف مكعب حجمه 216

الحل

نفرض أن طول حرف المكعب = س

$$\therefore \text{حجم المكعب} = \text{س}^3$$

$$\therefore \text{س}^3 = 216$$

$$\therefore \text{س} = \sqrt[3]{216}$$

$$\therefore \text{س} = 6$$

\therefore طول حرف المكعب = 6

وسوف ندرس بالتفصيل المكعب والكرة في درس تطبيقات على الجنور



أوجد ناتج ما يأتي:

$$\textcircled{1} \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\textcircled{2} \sqrt[3]{8 - \sqrt[3]{9}}$$

$$\textcircled{3} \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{25}$$

الحل

$$\textcircled{1} 2 = 3 - 5 = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{25}$$

$$\textcircled{2} 6 = 2 - 3 = \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{9}$$

$$\textcircled{3} 2 = \frac{8}{4} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{4}}$$

أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في 3:

$$\textcircled{1} 6 = 7 + \text{س}^2$$

$$\textcircled{2} 64 = \text{س}^3$$

الحل

$$\textcircled{1} \therefore \{4\} = \text{ح.م.}$$

$$\therefore 4 = \sqrt[3]{64}$$

$$\textcircled{2} \therefore 64 = \text{س}^3$$

$$\therefore 7 - 6 = \text{س}^2$$

$$\textcircled{3} \therefore 6 = 7 + \text{س}^2$$

$$\textcircled{1} \therefore \{1\} = \text{ح.م.}$$

$$\therefore 1 = \sqrt[3]{1}$$

$$\therefore 1 = \text{س}^3$$

أوجد مجموعة الحل في 4 للمعادلات الآتية:

$$\textcircled{1} 21 = 4 - \text{س}^2$$

$$\textcircled{2} 57 = 3 + \text{س}^2$$

الحل

$$\textcircled{1} \therefore 21 = 4 - \text{س}^2$$

$$\therefore 57 = 3 + \text{س}^2$$

$$\therefore 27 = \frac{54}{2} = \text{س}^2$$

$$\therefore 54 = \text{س}^2$$

$$\therefore 3 = \text{س}$$

$$\therefore \sqrt[3]{27} = \text{س}$$

$$\therefore \{3\} = \text{ح.م.}$$

ملاحظة
لحل المعادلة لا بد
أن نجعل من يمينها
في الطرف الأيمن
وذلك باستخدام
المتكوس الجمعي
ثم المتكوس الضري



تدريب (٣)

أكمل لإيجاد مجموعة حل المعادلة $2x^3 - 6 = 48$ في \mathbb{R} :

وكيفية الحل

$$\begin{aligned} 2x^3 - 6 &= 48 & \therefore 2x^3 &= 48 + 6 \\ 2x^3 &= 54 & \therefore x^3 &= \frac{54}{2} \\ x^3 &= 27 & \therefore x &= \sqrt[3]{27} \\ \{x\} &= \{3\} \end{aligned}$$



تدريب (٤)

أكمل لإيجاد مجموعة حل المعادلة $27 = (x+2)^3$ في \mathbb{R} :

وكيفية الحل

$$\begin{aligned} 27 &= (x+2)^3 & \therefore \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{(x+2)^3} \\ 3 &= x+2 & \therefore x &= 3 - 2 \\ \{x\} &= \{1\} \end{aligned}$$



تدريب (٥)

أكمل ما يأتي:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} & \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} \\ \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} & \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} \\ \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} & \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} \end{aligned}$$



أوجد طول قطر الكرة التي حجمها $113,04 \text{ cm}^3$ ($\pi = 3,14$)

وكيفية الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{حجم الكرة} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ 113,04 &= \frac{4}{3} \times 3,14 \times r^3 \\ 113,04 &= \frac{4 \times 3,14}{3} \times r^3 \\ 113,04 &= \frac{12,56}{3} \times r^3 \\ 113,04 \times \frac{3}{12,56} &= r^3 \\ 27 &= r^3 \\ \therefore r &= \sqrt[3]{27} \\ \therefore \text{طول قطر الكرة} &= 2r = 6 \text{ cm} \end{aligned}$$



أمثلة للتدريب

تدريب (١)

أكمل ما يأتي:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} & \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} \\ \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} & \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} \end{aligned}$$

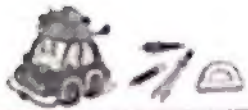


تدريب (٢)

أكمل ما يأتي:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} & \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} \\ \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} & \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{27} \end{aligned}$$





١٧) إذا كانت $\sqrt{3} = 64$ فإن $\sqrt{3} = \dots\dots\dots$

١٨) إذا كانت $\sqrt{3} = 3$ فإن $\sqrt{3} = \dots\dots\dots$

١٩) إذا كان $\sqrt{9} = \sqrt{3}$ فإن $\sqrt{3} = \dots\dots\dots$

٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

١) $\sqrt{27} - \sqrt{3} = \dots\dots\dots$ [٣ - ٩ ٣ - ٩ ٣ - ٩]

٢) $\sqrt{0.008} = \dots\dots\dots$ [٢ - ٠.٢ - ٠.٢ ٢ - ٠.٢ - ٠.٢]

٣) $\sqrt{\frac{8}{27}} = \dots\dots\dots$ [$\frac{2}{3}$ - $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ - $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ - $\frac{2}{3}$]

٤) $\sqrt{64} - \sqrt{8} = \dots\dots\dots$ [٢ - ٢٦ ٢ - ٢٦ ٢ - ٢٦]

٥) $\sqrt{\frac{7}{8}} = \dots\dots\dots$ [$\frac{7}{8}$ - $\frac{7}{8}$ $\frac{7}{8}$ - $\frac{7}{8}$ $\frac{7}{8}$ - $\frac{7}{8}$]

٦) $\sqrt{25} = \dots\dots\dots$ [٥ - ١٢٥ ٥ - ١٢٥ ٥ - ١٢٥]

٧) $\sqrt{27} = \dots\dots\dots$ [٣ - ٨١ ٣ - ٨١ ٣ - ٨١]

٨) $\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)} = \dots\dots\dots$ [$\frac{1}{8}$ - $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ - $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ - $\frac{1}{8}$]

٩) $\sqrt{(8-)} = \dots\dots\dots$ [٤ - ٤ ٤ - ٤ ٤ - ٤]

١٠) $\sqrt{125} - \sqrt{25} = \dots\dots\dots$ [٥ - ٥ ٥ - ٥ ٥ - ٥]

١١) $\sqrt{0.008} \times \sqrt{0.008} = \dots\dots\dots$ [٢ - ٢ ٢ - ٢ ٢ - ٢]

١٢) $\sqrt{3} = \sqrt{3} = \dots\dots\dots$ [٣ - ٣ ٣ - ٣ ٣ - ٣]

١٣) $\sqrt{(3-)} + \sqrt{(3-)} = \dots\dots\dots$ [٦ - ٦ ٦ - ٦ ٦ - ٦]



على الجذر التكعيبي للسلسلة النسبية

أولاً: راجع معنا واختر نفسك



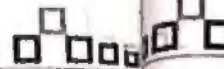
عزيزي الطالب :
في هذا المكان من كل تمرين ستجد :
اسئلة لمراجعة ما سبق في صورة اختبار تراكمي على ما سبق دراسته
تجيبه في نفس الورقة قبل أن تدخل في الدرس الجديد وهذا يجعلك تتذكر
ما درست باستمرار ولا تنساه ويجعلك في مراجعة مستمرة لدروسك السابقة
مما يجعلك في تواصل مع ما درست وأيضاً يعودك على الاختبارات
ويزيل رهبتها في نفسك وهذه الميزة يقدمها لك كتابنا الماهر فقط

ثانياً: أجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

١) اكمل ما يأتي :

- | | |
|--|---|
| ١) $\sqrt{8} = \dots\dots\dots$ | ٢) $\sqrt{125} = \dots\dots\dots$ |
| ٣) $\sqrt{1+26} = \dots\dots\dots$ | ٤) $\sqrt{1-64} = \dots\dots\dots$ |
| ٥) $\sqrt{8} = \dots\dots\dots$ | ٦) $\sqrt{8-} = \dots\dots\dots$ |
| ٧) $\sqrt{4} = \dots\dots\dots$ | ٨) $\sqrt{8-} + \sqrt{8} = \dots\dots\dots$ |
| ٩) $\sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{8} = \dots\dots\dots$ | ١٠) $\sqrt{27} = \dots\dots\dots$ |
| ١١) $\sqrt{3-} = \dots\dots\dots$ | ١٢) $\sqrt{3} = \dots\dots\dots$ |
| ١٣) $\sqrt{8-} + \sqrt{9} = \dots\dots\dots$ | ١٤) $\sqrt{64} - \sqrt{27} = \dots\dots\dots$ |
| ١٥) $\sqrt{125-} = \dots\dots\dots$ | ١٦) $\sqrt{9} + \dots\dots\dots = \sqrt{25}$ |



٥ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية في هـ :

- ① $5 = \sqrt{x}$ (١٢٥) ② $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$ (١٢٥) ③ $4x = \sqrt{x}$ (٨٠) ④ $\sqrt{1000} = \sqrt{x}$ (١٠٠٠) ⑤ $27 = (1+x)^2$ (١٠) ⑥ $125 = (2-x)^2$ (٧) ⑦ $8 = (1+x)^2$ (١٠) ⑧ $8 = (1-x)^2$ (١٠) ⑨ $54 = 10 - (1-x)^2$ (١٠) ⑩ $18 = 10 + (2-x)^2$ (١٠) ⑪ $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$ (١٠)

- ٦ ① أوجد طول حرف مكعب حجمه ١٢٥ سم^٣ (٥) ② أوجد طول حرف مكعب حجمه $3\frac{3}{8}$ سم^٣ (٢) ③ إذا كان مربع عدد موجب يساوي ٩ فأوجد مكعب هذا العدد (٢٧) ④ أوجد المساحة الجانبية لمكعب حجمه ٢١٦ سم^٣ (٢١٦) ⑤ (المساحة الجانبية = $4x^2$ حيث x طول حرفه) (٢١٦) ⑥ أوجد طول نصف قطر الكرة التي حجمها ٤٨٥١ سم^٣ (٢١٦) ⑦ كرة حجمها $\frac{1372}{81}\pi$ وحدة مكعبة أوجد طول قطرها (حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi r^3$) (٢١٦)



مسائل المتفوقين

- ٧ أوجد في هـ مجموعة حل المعادلة $6 = \frac{x}{4} + \frac{x}{2}$ (٢) ٨ أوجد في هـ مجموعة حل المعادلة $1 = \sqrt{x-3}$ (١١) ٩ أوجد في هـ مجموعة حل المعادلة $27 = (1-x)^2$ (٢٠) ١٠ إنشاء مكعب الشكل سعته لتر واحد احسب طول حرفه (٢٠)

- ⑪ $\left[\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 2, 2 \right] \dots\dots\dots = \sqrt{25} + 3\sqrt{\frac{3}{8}}$ ⑫ $\left[\frac{11}{4}, 1, 1, 1 \right] \dots\dots\dots = \sqrt{125} + \sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{27} - \sqrt{2}$ ⑬ $\left[\frac{9}{4}, 9, 9, 9 \right] \dots\dots\dots = \sqrt{9} + \sqrt{9} + \sqrt{9} + \sqrt{9}$



مسائل المستوى الثاني

٣ أوجد قيمة كلاً مما يأتي :

- ① $\sqrt{64}$ ② $\sqrt{216}$ ③ $\sqrt{729}$ ④ $\sqrt{512}$ ⑤ $\sqrt{1,331}$ ⑥ $\sqrt{0,064}$ ⑦ $\sqrt{\frac{64}{125}}$ ⑧ $\sqrt{\frac{27}{343}}$ ⑨ $\sqrt{\frac{512}{8000}}$ ⑩ $\sqrt{\frac{216}{125}}$ ⑪ $\sqrt{8} + \sqrt{4}$ ⑫ $\sqrt{\frac{9}{25}}$

٤ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية في هـ :

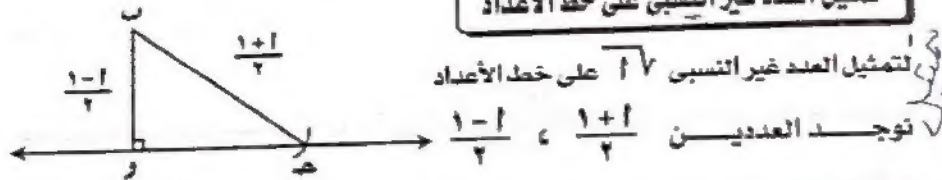
- ① $8 = x^2$ (٢) ② $64 = x^2$ (٢) ③ $125 = x^2$ (٢) ④ $10 = 27 + x^2$ (٢) ⑤ $2 = 1 + x^2$ (٢) ⑥ $8 = 9 + x^2$ (٢) ⑦ $8 = 7 + x^2$ (٢) ⑧ $17 = 10 - x^2$ (٢) ⑨ $16 = 80 + x^2$ (٢) ⑩ $27 = (1-x)^2$ (٢) ⑪ $27 = (1-x)^2$ (٢) ⑫ $27 = (1-x)^2$ (٢)



ملاحظات

- الأعداد غير النسبية يرمز لها بالرمز \mathbb{H}
- مجموعة الأعداد النسبية \mathbb{Q} وغير النسبية \mathbb{H} مجموعتان منفصلتان أي أن $\mathbb{H} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$
- أي عدد غير نسبي تنحصر قيمته بين عددين نسبيين
- كل عدد نسبي تمثله نقطة وحيدة على خط الأعداد ولكن كل نقطة على خط الأعداد لا تمثل عدداً نسبياً حيث يوجد نقط أخرى تمثل أعداداً غير نسبية
- يمكن تمثيل أي عدد غير نسبي على الصورة \sqrt{a} على خط الأعداد حيث $a \in \mathbb{Q}$
- العدد غير النسبي يُمثل بعدد عشري غير منته

تمثيل العدد غير النسبي على خط الأعداد



نعين نقطة b على عمود مرسوم من نقطة الأصل o بحيث $ob = 1$ وحدة طول نركز بسن الفرجار في نقطة b وبفتحة طولها 1 وحدة طول نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة ولتكن c فتكون هي النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{2}$ على خط الأعداد

مجموعة الأعداد الحقيقية - \mathbb{R}

مجموعة الأعداد الحقيقية تتكون من اتحاد المجموعتين \mathbb{Q} و \mathbb{H} ويرمز لها بالرمز \mathbb{R}

أي أن $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{H}$

مجموعة الأعداد النسبية \mathbb{Q}	مجموعة الأعداد غير النسبية \mathbb{H}
مجموعة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z}	
مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N}	

- كل عدد حقيقي تمثله نقطة وحيدة على خط الأعداد وكل نقطة على خط الأعداد تمثل عدداً حقيقياً وحيداً
- كل عدد نسبي هو عدد حقيقي ولكن ليس كل عدد حقيقي هو عدد نسبي



مجموعة الأعداد غير النسبية " \mathbb{H} "

مجموعة الأعداد الحقيقية " \mathbb{R} "

علمنا فيما سبق أن العدد النسبي هو العدد الذي يمكن وضعه في صورة $\frac{a}{b}$:
 $1, 2, 3, \dots, 0, \dots, -1, -2, -3, \dots, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$ (أي في صورة $\frac{a}{b}$ بسط مقام)
 مثل $2, 3, -4, 5, \dots$ مثل $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$ مثل الجذر التربيعي للعدد النسبي المربع الكامل
 مثل $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$ مثل الجذر التكعيبي للعدد النسبي المكعب الكامل
 ولكن يوجد كثير من الأعداد لا يمكن وضعها على صورة $\frac{a}{b}$ مثل $\sqrt{2}$ لأنه لا يوجد عدد نسبي مربعه يساوي 2 وعلى ذلك فإن :

العدد غير النسبي

العدد غير النسبي " \mathbb{H} " هو العدد الذي لا يمكن وضعه على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث $1, 2, 3, \dots, 0, \dots, -1, -2, -3, \dots$

ومن أمثلة الأعداد غير النسبية :

- ① الجذور التربيعية للأعداد الموجبة التي ليست مربعات كاملة
 مثال : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$
- ② الجذور التكعيبية للأعداد التي ليست مكعبات كاملة
 مثال : $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{7}, \dots$
- ③ النسبة التقريبية π حيث أنها تساوي $\frac{22}{7}$ تقريباً (أي أنها قيمة تقريبية) وهذه الأعداد جميعها لا يمكن إيجاد قيمة مضبوطة لها



مثال أوجد عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{2}$

الحل

نبحث عن عددين مربعين كاملين أحدهما أصغر من $\sqrt{2}$ والآخر أكبر من $\sqrt{2}$
فنجد أنهما ١، ٤ $1 < \sqrt{2} < 2$
٢، ٤ $2 < \sqrt{2} < 3$
٢، ٤ $2 < \sqrt{2} < 3$
٢، ٤ $2 < \sqrt{2} < 3$

حل آخر:

باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $\sqrt{2}$ فنجد أن $\sqrt{2} \approx 1.414213562$
نجد أن $\sqrt{2} = 1 + \text{كسر عشري}$
٢، ٤ $2 < \sqrt{2} < 3$



مثال أوجد عددين نسبيين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{2}$

الحل

بنفس الطريقة السابقة نجد أن $\sqrt{2}$ ينحصر بين ٢، ٤ وأن $\sqrt{2} = 1 + \text{كسر عشري}$
وبالتجريب نجد أن $1.41 = \sqrt{2}$ ، $1.42 = \sqrt{2}$ ، $1.43 = \sqrt{2}$
..... ، $1.46 = \sqrt{2}$ ، $1.47 = \sqrt{2}$
نلاحظ أن $1.46 < \sqrt{2} < 1.47$ ، $1.46 > 2 > 1.47$

أي أن $\sqrt{2}$ ينحصر بين ١، ٤ ، ١، ٥

ولإيجاد قيمة تقريبية أدق لرقمين عشريين نأخذ العدد الأصغر ١، ٤
وبالتجريب أيضاً $1.41 = \sqrt{2}$ ، $1.42 = \sqrt{2}$ ، $1.43 = \sqrt{2}$
..... ، $1.46 = \sqrt{2}$ ، $1.47 = \sqrt{2}$
نلاحظ أن $1.46 < \sqrt{2} < 1.47$ ، $1.46 > 2 > 1.47$

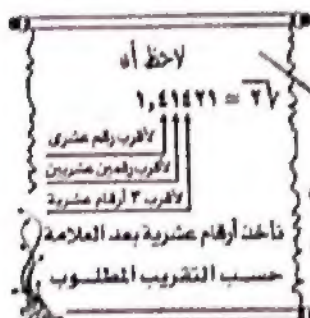
حل آخر:

باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $\sqrt{2}$

٢، ٤ $2 < \sqrt{2} < 3$ ، ١، ٤ $1 < \sqrt{2} < 2$ ، ١، ٥ $1 < \sqrt{2} < 2$

٢، ٤ $2 < \sqrt{2} < 3$ ، ١، ٤ $1 < \sqrt{2} < 2$ ، ١، ٥ $1 < \sqrt{2} < 2$

٢، ٤ $2 < \sqrt{2} < 3$ ، ١، ٤ $1 < \sqrt{2} < 2$ ، ١، ٥ $1 < \sqrt{2} < 2$



علاقة الترتيب في \mathbb{R}

- جميع الأعداد الحقيقية التي على يمين الصفر تكون أكبر من الصفر وتكون مجموعة
- تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ويرمز لها بالرمز \mathbb{R}^+
- جميع الأعداد الحقيقية التي على يسار الصفر تكون أصغر من الصفر وتكون مجموعة
- تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة ويرمز لها بالرمز \mathbb{R}^-
- ومن ذلك $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$ ، $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{0\}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة $\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \cup \{0\}$
- $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$ ، $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$

أمثلة توضيحية

مثال ١ وهم أي الأعداد الآتية نسبي وأيها غير نسبي:

٣ $\sqrt{8}$

٢ $\sqrt{16}$

١ $\sqrt{7}$

٦ $\frac{1}{\pi}$

٥ صفر

٤ $\sqrt{9}$

الحل

- ١ $\sqrt{7}$ عدد غير نسبي لأن لا يوجد عدد مربعه يساوي ٧
- ٢ $\sqrt{16}$ عدد نسبي لأن $\sqrt{16} = 4$
- ٣ $\sqrt{8}$ عدد نسبي لأن $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- ٤ $\sqrt{9}$ عدد غير نسبي لأن لا يوجد عدد مكعبه يساوي ٩
- ٥ صفر عدد نسبي لأن صفر $= \frac{\text{صفر}}{1} = \frac{\text{صفر}}{2} = \dots$
- ٦ $\frac{1}{\pi}$ عدد غير نسبي لأن π عدد غير نسبي فيكون $\frac{1}{\pi}$ عدد غير نسبي



مثال ٤ أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt[3]{2}$

الحل

نبحث عن عدد مكعب كامل أصغر من ٢ وعدد مكعب كامل أكبر من ٢ فنجد أنهما ١، ٨
 $1 < 2 < 8$ $\therefore \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{8}$ $\therefore 1 < \sqrt[3]{2} < 2$
 وبالتجريب نجد أن $1.4^3 = 2.744$ $1.5^3 = 3.375$
 $\therefore \sqrt[3]{2} \approx 1.4$

حل آخر:

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن $\sqrt[3]{2} = 1.442249$
 لأقرب جزء من عشرة $\sqrt[3]{2} \approx 1.4$
 لأقرب جزء من مائة $\sqrt[3]{2} \approx 1.44$
 لأقرب جزء من ألف $\sqrt[3]{2} \approx 1.442$

مثال ٥ أثبت أن $\sqrt{17}$ ينحصر بين ٤,١٢ و ٤,١٣

الحل

$16.9744 = 4.12^2$ ، $17 = (\sqrt{17})^2$ ، $17.0569 = 4.13^2$
 $16.9744 < 17 < 17.0569$ $\therefore 4.12^2 < (\sqrt{17})^2 < 4.13^2$
 $\therefore 4.12 < \sqrt{17} < 4.13$

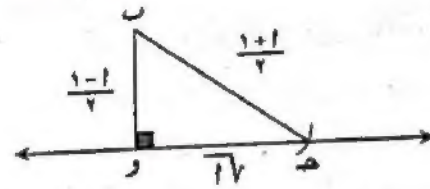
حل آخر:

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن $\sqrt{17} \approx 4.1231$
 ونجد أن قيمة $\sqrt{17}$ أكبر من ٤,١٢ وأصغر من ٤,١٣
 $\therefore \sqrt{17}$ ينحصر بين ٤,١٢ و ٤,١٣



مثال ٦ حدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{5}$ على خط الأعداد

الحل

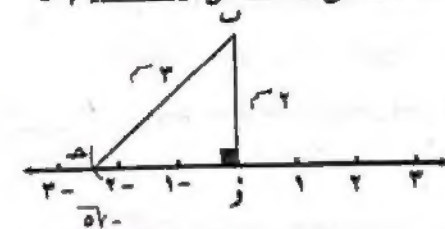


لتمثيل $\sqrt{5}$ فإننا نوجد طول الضلعين اللذين يمثلان الوتر وأحد ضلعي القائمة مثلث قائم ونرسم هذا المثلث على خط الأعداد

حيث $\frac{1+1}{2}$ يمثل طول وتر المثلث $\frac{1-1}{2}$ ويمثل أحد ضلعي القائمة المرسوم عمودياً على خط الأعداد ونرسم من نقطة ب عموداً يصل إلى نقطة ب حيث $OB = \frac{1-1}{2}$ وحدة طول نركز بسن الفرجار في نقطة ب وبفتحة طولها $\frac{1+1}{2}$ وحدة طول نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة و لتكن ه فتكون هي النقطة التي تمثل $\sqrt{5}$ على خط الأعداد ولتمثيل العدد $\sqrt{5}$ على خط الأعداد تتبع الخطوات الآتية:

(١) نوجد العددين اللذين يمثلان طول الوتر وطول الضلع وهما $\frac{1+5}{2} = 3$ ، $\frac{1-5}{2} = -2$

(٢) نرسم خط الأعداد ومن نقطة و نقيم عمود طوله $2 = \frac{1-5}{2}$ يصل إلى نقطة ب
 (٣) نركز بسن الفرجار عند نقطة ب وبفتحة طولها $3 = \frac{1+5}{2}$ نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة ه نسميها ه فتكون نقطة ه هي النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{5}$



ملاحظة

• لتمثيل $\sqrt{5}$ على خط الأعداد تتبع نفس الخطوات ولكن نرسم القوس من جهة اليسار



• من نقطة ب نركز سن الفرجار وبفتحة طولها ٤ سم نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة هـ. وهى النقطة التى تمثل $\sqrt{17}$ نركز بسن الفرجار عند نقطة هـ وبفتحة تساوى و هـ نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة هـ وهى النقطة التى تمثل $\sqrt{17} + 2$ (لأن $\sqrt{17} + \sqrt{17} = \sqrt{17} \cdot 2$)

أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية حيث $س \in \mathbb{H}$:

١) $س = 2$ من $٦ = ٢$

٢) $س = 5 - 2$ من $٧ = ٥ - ٢$

٣) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$

الحل

١) $س = 2$ من $٦ = ٢$: $\frac{٦}{٢} = ٣$: $س = ٣$

٢) $س = 5 - 2$ من $٧ = ٥ - ٢$: $\{ \sqrt{٣٧} - ٤, \sqrt{٣٧} \} = ٥ - ٢$: $س = ١٢$

٣) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

٤) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

٥) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

٦) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

٧) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

٨) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

٩) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

١٠) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

١١) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

١٢) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

١٣) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

١٤) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

١٥) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

١٦) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$

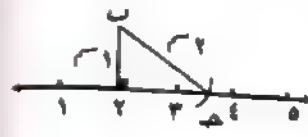
١٧) $س = 2$ من $٩ = ٤ + ٥$: $\sqrt{١٢} = ٣$: $س = ١٢$



• هذه النقط التى تمثل الأعداد التالية على خط الأعداد :
١) $\sqrt{٣٧} + ٢$ ٢) $\sqrt{٣٧} - ٢$ ٣) $١ - \sqrt{٣٧}$

الحل

١) لتمثيل $\sqrt{٣٧} + ٢$ فإننا نبدأ من النقطة التى تمثل العدد ٢ وذلك بعد تحديد طول الوتر وطول أحد ضلعي القائمة كما يلي : $(١ = \frac{١-٣}{٢}, ٢ = \frac{١+٣}{٢})$



ثم نرسم خط الأعداد ومن النقطة التى تمثل العدد ٢ نقيم عمود طوله $= ١$ يصل إلى نقطة ب نركز سن الفرجار عند نقطة ب وبفتحة طولها $\sqrt{٣٧}$ نرسم قوساً يقطع خط الأعداد فى النقطة هـ فتكون نقطة هـ هى النقطة التى تمثل $\sqrt{٣٧} + ٢$



٢) لتمثيل $\sqrt{٣٧} - ٢$ فإننا نقوم بنفس الخطوات ولكن نرسم قوساً يقطع خط الأعداد من الجهة اليسرى



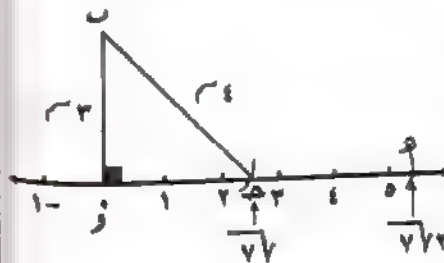
٣) لتمثيل العدد $١ - \sqrt{٣٧}$ يفضل أن نجعله على الصورة $\sqrt{٣٧} + ١$ وب نفس الطريقة نقيم عمود من عند النقطة التى تمثل العدد $- ١$ طوله $= ١$ ليصل

لنقطة ب نركز بسن الفرجار عند نقطة ب وبفتحة طولها $= \sqrt{٣٧}$ نرسم قوساً يقطع خط الأعداد فى نقطة هـ فتكون هى النقطة التى تمثل $١ - \sqrt{٣٧}$

• هذه النقط التى تمثل العدد $\sqrt{٣٧} + ٢$ على خط الأعداد

الحل

نمثل $\sqrt{٣٧}$ أولاً على خط الأعداد : $٣ = \frac{١-٧}{٢}, ٤ = \frac{١+٧}{٢}$: \therefore



• نرسم خط الأعداد ومن نقطة و نرسم عمود طوله $= ٣$ يصل لنقطة ب





تمارين (٣)

على مجموعة الأعداد غير النسبية



ساعة امتحان ومراجعة



أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

١) أكمل ما يأتي:

..... = $3\sqrt{\frac{2}{8}}$ ①

..... = $\sqrt[3]{4}$ ②

..... = $\sqrt[3]{\frac{1}{8} \times 1000}$ ③

..... إذا كان $\frac{4}{3} = \frac{س}{4}$ فإن س = ④



ب) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية حيث س ∈ ℝ

① س $3 + 27 = ٠$ ② $3(س + ٣) = ٣٤٣$

.....

.....

.....

.....



ج) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية حيث س ∈ ℝ

① $\frac{2}{5} = \sqrt[3]{س}$ ② $٣ - ٢ = ٥ - س$

.....

.....

.....

.....



تدريب (٢)

اذكر بعض الأمثلة لأعداد نسبية وبعض الأمثلة لأعداد غير نسبية:

..... أمثلة لأعداد نسبية

..... أمثلة لأعداد غير نسبية

تدريب (٣)

اجتد ان $٣,٥ > \sqrt[3]{١٢٧} > ٣,٤$

بكم العمل

..... = $\sqrt[3]{(٣,٥)}$ ، = $\sqrt[3]{(١٢٧)}$ ، = $\sqrt[3]{(٣,٤)}$ ∴

..... > ١٢ > ∴

..... > $\sqrt[3]{(.....)}$ > $\sqrt[3]{(.....)}$ ∴

..... > $\sqrt[3]{.....}$ > ∴



تدريب (٤)

حدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt[3]{٣}$ على خط الأعداد

بكم العمل

..... = $\frac{..... + ٣}{٢}$ ، = $\frac{..... - ٣}{٢}$



يمكن أيضاً تمثيل العدد $\sqrt[3]{٣} + ١$ بأن



تدريب (٥)

أوجد مجموعة حل المعادلة ٣ س $٢ + ٤ = ٤$ حيث س ∈ ℝ

بكم العمل

..... ∴ ٣ س $٢ + ٤ = ٤$ ∴

..... ∴ ٣ س $٢ + ٤ = ٤$ ∴

..... ∴ ٣ س $٢ + ٤ = ٤$ ∴

..... ∴ ٣ س $٢ + ٤ = ٤$ ∴

..... ∴ ٣ س $٢ + ٤ = ٤$ ∴





✓ ١٣ العدد غير النسبي المحصور بين -٢ - ١ هو

[٢٧ - د ١,٥ - د ٣ - د ٢٧]

✓ ١٤ أقرب عدد صحيح للعدد $25\sqrt{2}$ هو

[٥ - د ٣ - د ٢ - د ١٢,٥]

[١٥ د ن د =]

[١٦ د ن د =]

[١٧ د ن د =]

[١٨ د ن د =]

[١٩ د ن د =]

٤ أو الأعداد الآتية نسبي وأيها غير نسبي :

$\frac{\pi}{2}$ ، $\sqrt{16}$ ، $\sqrt{\frac{16}{25}}$ ، $-\sqrt{2}$ ، $1,7$ ، $2\sqrt{2}$ ، صفر ، $4\sqrt{2}$ ، 3 ، $2\sqrt{2}$



مسائل المستوى الثاني

٥ أوجد عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد :

١) $5\sqrt{2}$ ٢) $12\sqrt{2}$ ٣) $10\sqrt{2}$ ٤) $20 - \sqrt{2}$

٦ إذا كانت س عدداً صحيحاً فأوجد قيمة س في كل من الحالات الآتية :

١) $1 + \sqrt{2} > 8\sqrt{2} > س$ ٢) $1 + \sqrt{2} > 7\sqrt{2} > س$

٣) $1 + \sqrt{2} > 125\sqrt{2} > س$ ٤) $1 + \sqrt{2} > 5\sqrt{2} > س$

٥) $1 + \sqrt{2} > 30\sqrt{2} > س$ ٦) $1 + \sqrt{2} > 100\sqrt{2} > س$

٧ أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $6\sqrt{2}$

٢ أوجد لأقرب جزء من مائة قيمة $11\sqrt{2}$

٣ أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $2\sqrt{2}$



ثانياً : اجب عما يأتي :



مسائل المستوى الأول

٢ اكمل ما يأتي باستخدام أحد الرمزتين هـ أو هـ :

١) $5 \dots \sqrt{10}$ ٢) $10\sqrt{2} \dots 3$ ٣) صفر $\dots \sqrt{2}$

٤) $1,7 \dots \sqrt{3}$ ٥) $8\sqrt{2} \dots 2$ ٦) $9\sqrt{2} \dots 10\sqrt{2}$

٧) $9 - \sqrt{2} \dots \sqrt{4}$ ٨) $\sqrt{\frac{4}{9}} \dots \pi \frac{1}{4}$

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

[ص - د - م - د - د - د]

[ص - د - د - د - د - د]

[ط - د - م - د - د - د]

[ط - د - م - د - د - د]

[\leq د = د > د <]

[\leq د = د > د <]

[\leq د = د > د <]

[٣,٢ - د ٣ د ٣,٧١ د ٢,٩٩]

[٢,٩٩ د ٣,٧١ د ٣ د ٣,٢]

[٢,٩٩ د ٣,٧١ د ٣ د ٣,٢]

[٢,٩٩ د ٣,٧١ د ٣ د ٣,٢]

[٢,٩٩ د ٣,٧١ د ٣ د ٣,٢]

[٢,٩٩ د ٣,٧١ د ٣ د ٣,٢]

[٢,٩٩ د ٣,٧١ د ٣ د ٣,٢]

[٢,٩٩ د ٣,٧١ د ٣ د ٣,٢]

[٢,٩٩ د ٣,٧١ د ٣ د ٣,٢]

[٢,٩٩ د ٣,٧١ د ٣ د ٣,٢]

[٢,٩٩ د ٣,٧١ د ٣ د ٣,٢]



- ١٥ أوجد كلاً من طول ضلع وطول قطر مربع مساحته $3\sqrt{7}$ [٣٧ ، ٣٧]
 ٢ دائرة مساحة سطحها 3π أوجد محيطها [٣٧٢ ، ٣٧٢]

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

- ١ المربع الذي طول ضلعه $3\sqrt{7}$ تكون مساحته = [٦٤ ، ٣٦٤ ، ٩١ ، ٣]
 ٢ المربع الذي مساحته $10\sqrt{5}$ يكون طول ضلعه [٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥]
 ٣ المكعب الذي حجمه $64\sqrt{8}$ يكون طول حرفه [٨ ، ٤ ، ٤ ، ٦]
 ٤ إذا كان $s \geq 0$ وكان $s > 25 - \sqrt{5}$ فإن $s + 1$ [٤- ، ١- ، ٢- ، ٣-]
 ٥ إذا كان $s \geq 0$ وكان $s > |45 - \sqrt{5}|$ فإن $s + 1$ [٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨]



مسائل المتفوقين

- ١٧ أوجد المثلث ABC القائم الزاوية في B حيث $AB = 2\sqrt{3}$ ، $BC = 3\sqrt{3}$ واستخدم الشكل في تحديد النقطة التي تمثل العدد $13\sqrt{7}$ والنقطة التي تمثل العدد $13\sqrt{7} - 1$ على خط الأعداد

١٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

- إذا كان $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ، عدنان حقيقيان يقعان بين صفر ، ١ فإن $a = \dots$ [٢- ، ١ ، ٥ ، ٧]

١٩ اكتب أربعة أعداد غير نسبية محصورة بين ٦ ، ٨

٢٠ أوجد مجموعة حل المعادلة $s + 2\sqrt{3} = 3$ ومثل الحل على خط الأعداد



٨ أوجد قيمة تقريبية للعدد $10\sqrt{7}$ وتحقق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة

٩ أثبت أن :

$$\begin{aligned} 1) 1,7 &< \sqrt{3} < 1,8 \\ 2) 2,23 &< \sqrt{5} < 2,24 \\ 3) 2,44 &< \sqrt{6} < 2,45 \\ 4) 2,64 &< \sqrt{7} < 2,65 \end{aligned}$$

١٠ اثبت أن :

$$\begin{aligned} 1) \sqrt{10} &\text{ ينحصر بين } 3,1 \text{ و } 3,2 \\ 2) \sqrt{11} &\text{ ينحصر بين } 3,31 \text{ و } 3,32 \\ 3) \sqrt{13} &\text{ ينحصر بين } 3,60 \text{ و } 3,61 \\ 4) \sqrt{15} &\text{ ينحصر بين } 3,87 \text{ و } 3,88 \\ 5) \sqrt{17} &\text{ ينحصر بين } 4,12 \text{ و } 4,13 \\ 6) \sqrt{19} &\text{ ينحصر بين } 4,37 \text{ و } 4,38 \end{aligned}$$

١١ رتب تنازلياً :

$$\sqrt{70}, \sqrt{50}, \sqrt{8}, \sqrt{62}$$

١٢ هذه النقاط التي تمثل الأعداد الآتية على خط الأعداد :

$$\begin{aligned} 1) \sqrt{5} & 2) \sqrt{6} & 3) \sqrt{7} + 2 \\ 4) \sqrt{5} - 2 & 5) \sqrt{6} - 3 & 6) \sqrt{7} + 2 - \sqrt{6} \\ 7) \sqrt{7} - 2 & 8) \sqrt{5} + 2 & 9) 1 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

١٣ ارسم خط الأعداد وهذه عليه النقطة A التي تمثل العدد $2\sqrt{7}$ والنقطة B التي تمثل العدد $2\sqrt{7} + 1$ والنقطة C التي تمثل العدد $2\sqrt{7} - 1$

١٤ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} 1) s = 3 & 2) (37 \pm) & 3) s = 1 \\ 4) s = \frac{1}{4} & 5) s = 1 & 6) s = 1 \\ 7) s = 2 & 8) s = 4 & 9) s = 5 \\ 10) s = 1 & 11) s = 1 & 12) s = 1 \end{aligned}$$

الفترات

إذا اتصلت تليفونياً بأحد أصدقائك في أوقات مختلفة مثل الساعة ٤، والساعة ٥، والساعة ٦ ووجدت تليفونه مشغول فتقول اتصلت في مجموعة أوقات مختلفة ويمكن كتابة هذه الأوقات في صورة مجموعة مثل $\{٦، ٥، ٤\}$ لأنها أوقات مختلفة ومتباعدة أما إذا رد صديقك وظلت المكالمات من الساعة ٤ إلى الساعة ٦ دون انقطاع فتقول أننا اتصلنا لفترة زمنية من الساعة ٤ إلى الساعة ٦ وما بينهما وفي هذه الحالة نكتب بالصورة $[٦، ٤]$ وهنا يتضح الفرق بين المجموعة والفترتين فالفترة تكون متصلة دون انقطاع لعدد من الأوقات أو متباعدة ونضعها في أقواس بالشكل $\{ \}$ أما المجموعة فهي لأوقات أو أعداد متقطعة ونضعها في أقواس بالشكل $\{ \}$ والمجموعة يكتب فيها عدد أو أكثر وعند دراسة مجموعة الأعداد الحقيقية فإننا نحتاج للتعامل مع مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية فإذا نظرنا لخط الأعداد الحقيقية نجده يمثل مجموعة من الأعداد الحقيقية في صورة نقاط متصلة فإذا أردنا أن نأخذ أرقام بعينها مثل $٥، ٤، ٣، ٢$ فنكتب في صورة مجموعة أما إذا أردنا أرقام أو أعداد من ٢ إلى ٤ وما بينهما فنكتب في صورة فترة وما سبق نجد أن:

الفترات هي مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وهي نوعان (فترات محدودة - فترات غير محدودة)

أولاً : الفترات المحدودة

الفترة المغلقة

يمكن التعبير عن مجموعة الأعداد الحقيقية التي تتكون من العددين ٥، ٢ وجميع الأعداد الحقيقية المحصورة بينهما بطريقتين :
طريقة الصفة المميزة بالشكل $\{ س : س \geq ٢، س \leq ٥ \}$
أو بصورة فترة بالشكل $[٥، ٢]$ وتسمى فترة مغلقة لأننا أخذنا العددين ٥، ٢ مع مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بينهما لاحظ أن $٢ \in [٥، ٢]$ ، $٥ \in [٥، ٢]$

الفترة المفتوحة

أما إذا أخذنا الأعداد الحقيقية المحصورة بين ٥، ٢ وليس معهم ٥، ٢ فنكتب بالصورة $]٥، ٢[$ وتسمى هذه الفترة بالفترة المفتوحة ونلاحظ هنا أن $٢ \notin]٥، ٢[$ ، $٥ \notin]٥، ٢[$

الفترة النصف مفتوحة أو النصف مغلقة

وإذا أخذنا مجموعة الأعداد المحصورة بين ٥، ٢ ومعها العدد ٢ نكتب بالصورة $]٥، ٢]$ وتسمى فترة نصف مفتوحة ونلاحظ هنا أن $٢ \in]٥، ٢]$ أما $٥ \notin]٥، ٢]$ وفيما يلي ملخص للفترات المحدودة :
إذا كان $٢، ب$ عددين حقيقيين، $٢ > ب$ فإن :

الفترة	التعبير عنها بالصفة المميزة	تمثيلها على خط الأعداد
فترة مغلقة $[٢، ب]$	$\{ س : س \geq ٢، س \leq ب \}$	
فترة مفتوحة $]٢، ب[$	$\{ س : س > ٢، س < ب \}$	
فترة نصف مغلقة $]٢، ب]$	$\{ س : س > ٢، س \leq ب \}$	
أو نصف مفتوحة $[٢، ب[$	$\{ س : س \geq ٢، س < ب \}$	

ثانياً : الفترات غير المحدودة

إذا أردنا التعبير عن مجموعة من الأعداد الحقيقية تبدأ بعدد معين وغير منتهية مثل العدد ٢ وجميع الأعداد التي أكبر منه فيمكن التعبير عنها بطريقة الصفة المميزة بالشكل $\{ س : س \geq ٢ \}$ أو بصورة فترة بالشكل $[٢، \infty)$ وهذه الفترة غير محدودة لأنها تبدأ بالعدد ٢ ولكنها غير منتهية مع ملاحظة ما يلي :

- الرمز ∞ يقرأ ما لا نهاية ويعني أنه أكبر من أي عدد يمكن تصوره
- الرمز $-\infty$ يقرأ سالب ما لا نهاية ويعني أنه أصغر من أي عدد يمكن تصوره
- الرمزان $-\infty، \infty$ ليسا عددين حقيقيين ولا توجد نقطة تمثلهما



وهيما يلي ملخص لفترات غير المحدودة :

إذا كان $a \in \mathbb{R}$ فإن :

الفتره	التعبير عنها بالصفة للمميزه	تمثيلها على خط الاعداد
$]-\infty, a]$	$\{x : x \leq a, x \in \mathbb{R}\}$	
$]a, \infty[$	$\{x : x > a, x \in \mathbb{R}\}$	
$[a, \infty[$	$\{x : x \geq a, x \in \mathbb{R}\}$	
$]-\infty, a[$	$\{x : x < a, x \in \mathbb{R}\}$	



$\mathbb{R} = \{x : x \in \mathbb{R}\} =]-\infty, \infty[$

- مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $]0, \infty[$
- مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة $]-\infty, 0[$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة $]-\infty, 0[$ (أي السالبة والصفر)
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة $]0, \infty[$ (أي الموجبة والصفر)

أمثلة توضيحية

اكتب كلاماً مما يأتي على صورة فترة ثم مظهراً على خط الأعداد :

① $\{x : x \geq 1, x \in \mathbb{R}\}$

② $\{x : x < 2, x \in \mathbb{R}\}$

الحل

① $\{x : x \geq 1, x \in \mathbb{R}\} = [1, \infty[$



ملاحظة
عند كتابة الفترة
يجب كتابة
العدد الأصغر أولاً

لاحظ أن العدد 3 \in للفترة لذلك فإننا
نضع دائرة ونظللها أما 1 \notin للفترة لذلك
نضع دائرة غير مظللة على خط الأعداد



② $\{x : x \leq 2\}$

لاحظ أن 2 \in للفترة فنضع دائرة مظللة أما 0 \notin للفترة
إلى ما لا نهاية لذلك فظلل خط الأعداد من الجهة الموجبة حتى رأس التمس



هو عن كلاً من الفترات الآتية رمزياً بطريقة الصفة المميزة
ومظهراً على خط الأعداد :

① $\{x : x \geq 4\}$ ② $\{x : x \leq 1\}$ ③ $\{x : x \geq 0\}$

الحل

① $\{x : x \geq 4, x \in \mathbb{R}\} = [4, \infty[$

② $\{x : x \leq 1, x \in \mathbb{R}\} =]-\infty, 1]$

③ $\{x : x \geq 0, x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty[$



إذا كانت $\{x : x \geq 1\} = [1, \infty[$ ، $\{x : x \leq 4\} =]-\infty, 4]$

أوجد كلاماً مما يأتي على صورة فترة مستعيناً بخط الأعداد :

الحل

$\{x : x \geq 1\} \cup \{x : x \leq 4\}$ = مجموعة جميع عناصر

المجموعتين $\{x : x \geq 1\}$ و $\{x : x \leq 4\}$

$\{x : x \geq 1\} \cup \{x : x \leq 4\} =]-\infty, \infty[$

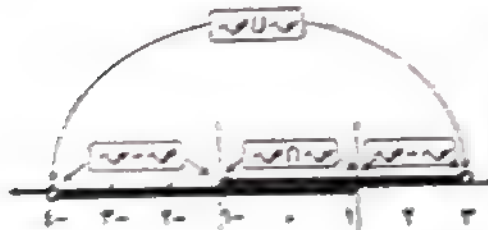
$= \mathbb{R}$

$\{x : x \geq 1\} \cap \{x : x \leq 4\}$ = مجموعة العناصر

المشتركة بين $\{x : x \geq 1\}$ و $\{x : x \leq 4\}$

$\{x : x \geq 1\} \cap \{x : x \leq 4\} = [1, 4]$

$= [1, 4]$



(مكرر ليس الفترة)
(عند إيجاد التقاطع)



الفنان

الحل

- $\checkmark \textcircled{5}$ $\times \textcircled{4}$ $\times \textcircled{3}$ $\checkmark \textcircled{2}$ $\times \textcircled{1}$
 $\checkmark \textcircled{10}$ $\times \textcircled{9}$ $\times \textcircled{8}$ $\checkmark \textcircled{7}$ $\checkmark \textcircled{6}$

أشئلة للتدريب

تدريب (١)

١ { س : س \exists ع ، $1 > س \geq 3$ } على صورة فترة هي

وتمثل على خط الأعداد بالشكل
 $2- \quad 1- \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

٢ $[4, 0]$ رمزياً بطريقة الصفة المميزة هي {

وتمثل على خط الأعداد بالشكل
 $1- \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

تدريب (٢)

إذا كان $س = [1, 2]$ ، $ع = [3, 0]$ فأوجد مستعيناً بخط الأعداد
 كل مما يأتي :

$3- \quad 2- \quad 1- \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$س \cup ع = \dots\dots\dots$ ، $س \cap ع = \dots\dots\dots$
 $س - ع = \dots\dots\dots$ ، $ع - س = \dots\dots\dots$

تدريب (٣)

أكمل كلاً مما يأتي على صورة فترة مستعيناً بخط الأعداد المرسوم :

$\dots\dots\dots = [4, 0] \cup \dots\dots\dots$ ①
 $\dots\dots\dots = [4, 0] - \dots\dots\dots$ ②

$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots \cap [1, \infty)$ ③
 $\dots\dots\dots = [1, \infty) - \dots\dots\dots$ ④

المادة في الرياضيات



$س - ع = \dots\dots\dots$ مجموعة العناصر الموجودة في $س$ وغير الموجودة في $ع$
 $[1, 4] - [2, 3] = \dots\dots\dots$
 $[2, 3] = \dots\dots\dots$
 $س - ع = \dots\dots\dots$ مجموعة العناصر الموجودة في $س$ وغير موجودة في $ع$
 $[2, 3] - [1, 4] = \dots\dots\dots$
 $[1, 4] = \dots\dots\dots$
 $س = \dots\dots\dots$ مجموعة عناصر $س$ (وتعني مكمل المجموعة $ع$)
 $س = \dots\dots\dots$ $ع = [2, 3] \cup [4, \infty)$

اكتب ما يأتي على صورة فترة مع التوضيح بالرسم على خط الأعداد :
 ① $[1, \infty) \cap [2, 3]$ ② $[2, 3] - [1, 4]$

الحل

① $[2, 3] = [1, \infty) \cap [2, 3]$

② $[2, 3] = [1, 4] - [1, 2]$

اوجد مستعيناً بخط الأعداد $[0, 2] - [1, 3]$

الحل

$[0, 2] = [0, 2] - [1, 3]$

لاحظ أن :

العدد ٥ ينتمي للفترة والمجموعة (التقاطع يختلف عند إيجاد الفرق بين مجموعتين)

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (x) أمام العبارة الخطأ :

- ① $[1, 2] \supseteq [2, 3]$ ② $[1, 2] \not\supseteq [2, 3]$
 ③ $[2, 3] \supseteq [1, 4]$ ④ $[2, 3] \not\supseteq [1, 4]$
 ⑤ $\{1\} = [0, 1] \cap [1, 2]$ ⑥ $[2, 3] = [2, 3] \cup [3, 4]$
 ⑦ $[2, 3] = [2, 3] - [1, 4]$ ⑧ $[2, 3] = [2, 3] \cap [1, 4]$
 ⑨ $ع = ع \cup ع$ ⑩ $[2, 3] \supseteq [2, 3]$



ثانياً: اكتب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

٢) عرّف عن مجموعات الأعداد الآتية على صورة فترة ومثلها على خط الأعداد :

١) $\{x : x \geq 3, x \in \mathbb{R}\}$

٢) $\{x : x \geq 1, x \in \mathbb{R}\}$

٣) $\{x : x \geq 1, x \in \mathbb{R}\}$

٤) $\{x : x \geq 8, x \in \mathbb{R}\}$

٥) $\{x : x \geq 1, x \in \mathbb{R}\}$

٦) مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

٧) مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

٣) مثل كلاً من الفترات الآتية على خط الأعداد وعرّف عنها رمزياً بطريقة الصفة المميزة :

١) $[1, 6]$

٢) $[2, 3]$

٣) $[4, 10]$

٤) $[3, 10]$

٥) $[3, 10]$

٦) $[3, 10]$

٧) $[3, 10]$

٨) $[3, 10]$

٩) $[3, 10]$

١٠) $[3, 10]$

٥) إذا كانت $[1, 4] = A$ ، $[2, 3] = B$ فاوجد :

١) $A \cup B$

٢) $A \cap B$

٣) $A - B$

٤) $B - A$

على الفترات

تعاريف (٤)

ساعة امتحان ومراجعة

أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) العدد غير النسبي المحصور بين ٤ و ٥ هو $\sqrt{17}$ $\sqrt{11}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$

٢) أقرب عدد صحيح للعدد $|\sqrt{36} - \sqrt{2}|$ هو ٣ ٤ ٥ ٦

٣) م - ح للمعادلة $(x + 9) = 2$ هي $\{-9\}$ $\{-10\}$ $\{10\}$ $\{3, 2\}$

٤) م - ح للمعادلة $\frac{1}{x} + 1 = 7$ هي $\{ \dots \}$ $\{2\}$ $\{2, -2\}$ $\{4\}$

(ب) حدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{5} - 3$ على خط الأعداد

(ج) أوجد عددين نسبين يتحصر بينهما العدد $\sqrt{3}$



- ٦ إذا كانت $\sim = [2, \infty)$ ، $\sim = [-2, \infty)$ فاوجد :
 ١ $\sim \cup \sim$
 ٢ $\sim \cap \sim$
 ٣ $\sim - \sim$
 ٤ $\sim - \sim$
 ٥ \sim
 ٦ \sim

مسائل المستوى الثانى

- ٧ أوجد شكلا مما يأتى على صورة فترة مستعيماً بخط الأعداد :
 ١ $\sim \cup [3, 4]$
 ٢ $[1, 2] \cap [3, 4]$
 ٣ $\sim \cup [1, 2]$
 ٤ $[1, 2] \cap [3, 4]$
 ٥ $\sim \cup [2, 3]$
 ٦ $[2, 3] \cap [4, 5]$
 ٧ $\sim \cup [3, 4]$
 ٨ $[2, 3] \cap [4, 5]$
 ٩ $\sim \cup [1, 2]$
 ١٠ $[1, 2] \cap [3, 4]$

- ٨ أوجد شكلا مما يأتى على صورة فترة مستعيماً بخط الأعداد :
 ١ $\sim \cup [1, 2]$
 ٢ $[1, 2] \cap [3, 4]$
 ٣ $\sim \cup [2, 3]$
 ٤ $[2, 3] \cap [4, 5]$
 ٥ $\sim \cup [3, 4]$
 ٦ $[3, 4] \cap [5, 6]$
 ٧ $\sim \cup [4, 5]$
 ٨ $[4, 5] \cap [6, 7]$
 ٩ $\sim \cup [5, 6]$
 ١٠ $[5, 6] \cap [7, 8]$

٩ اكمل لتحصل على عبارة صحيحة :

- ١ $\sim \cup \{3, 4\} = \{3, 4\} \cup \sim$
 ٢ $\sim \cap \{3, 4\} = \{3, 4\} \cap \sim$
 ٣ $\sim \cup \{3, 4\} = \{3, 4\} \cup \sim$
 ٤ $\sim \cap \{3, 4\} = \{3, 4\} \cap \sim$
 ٥ $\sim - \{3, 4\} = \{3, 4\} - \sim$
 ٦ $\sim - \{3, 4\} = \{3, 4\} - \sim$
 ٧ $\sim - \{3, 4\} = \{3, 4\} - \sim$
 ٨ $\sim - \{3, 4\} = \{3, 4\} - \sim$
 ٩ $\sim - \{3, 4\} = \{3, 4\} - \sim$
 ١٠ $\sim - \{3, 4\} = \{3, 4\} - \sim$
 ١١ $\sim - \{3, 4\} = \{3, 4\} - \sim$
 ١٢ $\sim - \{3, 4\} = \{3, 4\} - \sim$
 ١٣ $\sim - \{3, 4\} = \{3, 4\} - \sim$



١٠ اكمل لتحصل على عبارة صحيحة :

- ١ $\sim - \sim = \sim$
 ٢ إذا كانت $\sim = [2, 3]$ فإن $\sim \cup \sim = \sim$
 ٣ $\sim \cap [1, 2] = \sim$
 ٤ $\sim - \sim = \sim$
 ٥ $\sim - [2, 3] = \sim$
 ٦ $\sim \cap [2, 3] = \sim$

- ١١ إذا كانت $\sim = [-2, 3]$ ، $\sim = [1, 4]$ فاوجد باستخدام الفترات :
 ١ $\sim \cap \sim$
 ٢ $\sim \cup \sim$
 ٣ $\sim - \sim$
 ٤ $\sim - \sim$

- ١٢ إذا كانت $\sim = [1, 2]$ ، $\sim = [2, 3]$ فاوجد :
 ١ $\sim \cup \sim$
 ٢ $\sim \cap \sim$
 ٣ $\sim - \sim$
 ٤ $\sim - \sim$
 ٥ \sim
 ٦ \sim

١٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

- ١ $[2, 3] - [1, 2] = [1, 2]$
 ٢ $[2, 3] - [1, 2] = [1, 2]$
 ٣ $[2, 3] - [1, 2] = [1, 2]$
 ٤ $[2, 3] - [1, 2] = [1, 2]$
 ٥ $[2, 3] - [1, 2] = [1, 2]$
 ٦ $[2, 3] - [1, 2] = [1, 2]$
 ٧ $[2, 3] - [1, 2] = [1, 2]$
 ٨ $[2, 3] - [1, 2] = [1, 2]$
 ٩ $[2, 3] - [1, 2] = [1, 2]$
 ١٠ $[2, 3] - [1, 2] = [1, 2]$
 ١١ $[2, 3] - [1, 2] = [1, 2]$
 ١٢ $[2, 3] - [1, 2] = [1, 2]$
 ١٣ $[2, 3] - [1, 2] = [1, 2]$



١٤ إذا كانت $\sim = [-٤١٠]$ ، $\sim = [٣٠٠]$ ، $\sim = \{٣٠٠\}$ فتاوجد :

- ١ $\sim - \sim$ ٢ $\sim \cap \sim$ ٣ \sim ٤ \sim



مسائل المتفوقين

١٥ ١ إذا كان $\sim \cap \sim = [٦٠٣]$ ، $\sim \cup \sim = [٦٠٢]$ ، $\sim \supset \sim$ فتاوجد :

$\sim - \sim$ ، $\sim - \sim$ ، $\sim - \sim$

٢ إذا كان $\sim \cap \sim = [٤٠٢]$ ، $\sim \cup \sim = [٦٠١]$ ، $\sim - \sim = [٦٠٤]$ فتاوجد \sim ، \sim

٣ إذا كانت $[-٠٠٠] \cap [٤٠٣] = [٤٠٣]$ ، $[-٠٠٣] \cup [٢٠٣] = [٢٠٣]$ فتاوجد قيمة \sim

٤ إذا كانت $\sim^2 > \sim$ فإن $\sim \supset \sim$ أو مما يأتي :

$$[١٠٠] \cap [٠٠١] = [٠٠١] \quad [١٠٠] \cup [٠٠١] = [١٠٠]$$

١٦ أكمل ما يأتي :

١ إذا كانت $\sim \supset [٣٠٠]$ فإن $\sim^2 \supset \dots$

٢ إذا كانت $\sim \supset [٣٠٢]$ فإن $\sim^2 \supset \dots$

٣ إذا كانت $\sim \supset [١٦٠٩]$ فإن $\sqrt{\sim} \supset \dots$

٤ إذا كانت $\sim \supset [٩٠٠]$ فإن $\sqrt{\sim} \supset \dots$

٥ إذا كانت $\sim^2 \supset [٤٠٠]$ فإن $\sim^2 \supset \dots$

٦ إذا كانت $\sim^2 \supset [٩٠١]$ فإن $\sim \supset \dots$

هواة المهارة في الرياضيات www.elmaher.org

و يحتوي على امتحانات اضافية من السنوات السابقة مع كثير من الموضوعات

$$\dots \supset \sqrt{\sim} \quad \text{١٨} \quad [٣٠٢] \cap [٤٠٣] = [٤٠٣]$$

$$\dots = [٤٠١] - [٢٠١] \quad \text{١٩} \quad [١٠١] \cap [١٠١] = [١٠١]$$

$$\dots = [٣٠٠] \cup [٤٠٤] \quad \text{٢٠} \quad [٤٠٣] - [٢٠٣] = [٢٠٣]$$

$$\dots = [٣٠٢] \cup [٤٠٢] \quad \text{٢١} \quad [٣٠٢] - [٢٠٢] = [٢٠٢]$$

$$\dots = [٧٠٤] - [٧٠٣] \quad \text{٢٢} \quad [٤٠٣] \cap [٤٠٣] = [٤٠٣]$$

$$\dots = \{٥٠١\} \cup [٥٠١] \quad \text{٢٣} \quad [٥٠١] \cap [٥٠١] = [٥٠١]$$

$$\dots = \{٦٠٢\} \cap [٦٠٢] \quad \text{٢٤} \quad [٦٠٢] \cap \{٦\} = \{٦\}$$

$$\dots = \{٥٠٣\} - [٢٠٣] \quad \text{٢٥} \quad [٢٠٣] - [٢٠٣] = [٢٠٣]$$

$$\dots = \{٥٠٢\} \cup [٦٠٢] \quad \text{٢٦} \quad [٦٠٢] \cap [٥٠٢] = [٥٠٢]$$

$$\dots = \{٧٠٢\} - [٧٠٢] \quad \text{٢٧} \quad [٦٠٢] \cap [٦٠٢] = [٦٠٢]$$

$$\dots = [٤٠٢] - \{٤٠٣\} \quad \text{٢٨} \quad [٧٠٢] \cap [٧٠٢] = [٧٠٢]$$

$$\dots = [٤٠٣] \cup [٣٠٢] \quad \text{٢٩} \quad [٤٠٣] \cap \{٣\} = \{٣\}$$

$$\dots \supset [٤٠١] \quad \text{٣٠} \quad [٤٠١] \cap [٤٠١] = [٤٠١]$$

$$\dots \supset [٨٠٢] \quad \text{٣١} \quad [٨٠٢] \cap [٨٠٢] = [٨٠٢]$$



العمليات على الأعداد الحقيقية

يمكن إجراء بعض العمليات على الأعداد الحقيقية كالجمع والضرب ،
ولإجراء هذه العمليات يجب أن نتعرف على خواص هذه العمليات

أولاً : خواص جمع الأعداد الحقيقية

لكل $a, b, c \in \mathbb{R}$ يمكن إدراك خواص عملية الجمع الآتية :

① الإغلاق : مجموع أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي أي أن $a + b \in \mathbb{R}$

فمثلاً $5 + 2 = 7$ ، $5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ ، $6 = 3 + 3$

② الأبدال : لكل عددين حقيقيين a, b يكون $a + b = b + a$

فمثلاً $5 + 2 = 2 + 5 = 7$ ، $5\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ ، $5 = 2 + 3 = 3 + 2$

③ الجمع : $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

فمثلاً $12 = 9 + 3 = (4 + 5) + 3$ ، $12 = 4 + 8 = 4 + (5 + 3)$

أي أن $12 = 4 + 5 + 3 = (4 + 5) + 3 = 4 + (5 + 3)$

④ المحايد الجمعي : الصفر هو العنصر المحايد الجمعي لأن $a + 0 = 0 + a = a$

فمثلاً $5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 0$ ، $3 = 0 + 3$

⑤ المعكوس الجمعي : لكل عدد حقيقي a يوجد معكوس جمعي هو $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$ (صفر (المحايد الجمعي)

فمثلاً 3 معكوسه الجمعي -3 ، $5\sqrt{2}$ معكوسه الجمعي $(-5\sqrt{2})$

حيث $3 + (-3) = 0$ ، صفر $5\sqrt{2} + (-5\sqrt{2}) = 0$ صفر



لاحظ أن : المعكوس الجمعي للعدد صفر هو نفسه

حيث أن كل عدد حقيقي له معكوس جمعي فإن عملية الطرح ممكنة دائماً في \mathbb{R}
حيث $a - b = a + (-b)$ أي أن عملية الطرح $a - b$ تعني جمع العدد a
مع المعكوس الجمعي للعدد b أي أن عملية الطرح مغلقة ولكنها ليست إبدالية
وليس دمجية ولا يوجد لها عنصر محايد أو معكوس

ثانياً : خواص ضرب الأعداد الحقيقية

لكل $a, b, c \in \mathbb{R}$ يمكن إدراك خواص الضرب الآتية :

① الإغلاق : حاصل ضرب أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي

فمثلاً $6 = 3 \times 2$ ، $3\sqrt{2} \times 2 = 6\sqrt{2}$ ، $5\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 10$

② الأبدال : لكل عددين حقيقيين a, b يكون $a \times b = b \times a$

فمثلاً $5\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 10$ ، $10 = 3 \times 5 = 5 \times 3$

③ الجمع : $a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

فمثلاً $3\sqrt{2} \times 4 = 4 \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ ، $3\sqrt{2} \times 4 = 4 \times (3\sqrt{2})$

$3\sqrt{2} \times 8 = 3\sqrt{2} \times (4 \times 2) = (4 \times 3\sqrt{2}) \times 2$

أي أن $3\sqrt{2} \times 8 = (4 \times 3\sqrt{2}) \times 2 = 4 \times (3\sqrt{2} \times 2)$

④ المحايد الضربي : الواحد هو العنصر المحايد الضربي لأن $a \times 1 = 1 \times a = a$

فمثلاً $5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \times 1 = 1 \times 5\sqrt{2}$ ، $6 = 6 \times 1 = 1 \times 6$

⑤ المعكوس الضربي : لكل عدد حقيقي $a \neq 0$ يوجد معكوس ضربي هو $\frac{1}{a}$ بحيث $a \times \frac{1}{a} = 1$ (المحايد الضربي)

فمثلاً $1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$ حيث $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ هو $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

المعكوس الضربي للعدد $3\sqrt{2}$ هو $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ حيث $1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$



أوجد ناتج ما يأتي في أبسط صورة :

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \quad (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \quad (2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$$

الحل

$$2 \times 2 + \sqrt{3} \times 2 + 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \quad (1)$$

$$4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3 =$$

$$2 \times 2 - \sqrt{3} \times 2 - 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \quad (2)$$

$$4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3 =$$

$$1 \times 1 + 2 \times 1 \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = (1 - \sqrt{3})^2 \quad (3)$$

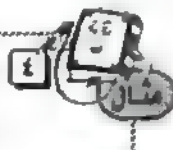
$$3\sqrt{3} - 4 = 1 + 3\sqrt{3} - 4 =$$



أوجد ناتج ما يأتي في أبسط صورة :

$$[(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})] = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$$

$$4 = (2) = (1 - 3) =$$



اكتب كلاً من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً :

$$\frac{2\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} \quad (1) \quad \frac{20}{5\sqrt{2}} \quad (2) \quad \frac{3}{3\sqrt{3}} \quad (3)$$

الحل

لاحظ أن المحايد الضربي 1 يمكن كتابته بالصورة $\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$ أو $\frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$ أو $\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$$\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} \times 3}{3\sqrt{3} \times 3} = \frac{3\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2} \times 20}{5\sqrt{2} \times 20} = \frac{20}{100\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$1 - \sqrt{3} = \frac{(1 - \sqrt{3}) \times 2}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3}} \quad (3)$$



لاحظ أن : المعكوس الضربي للمعد 1 هو 1 والمعكوس الضربي للمعد -1 هو -1
(لأن $\frac{1}{1} \times 1 = 1$ ليس لها معنى)

ولا يوجد معكوس ضربي للمعد صفر
حيث أن لكل عدد حقيقي لا يساوي الصفر له معكوس ضربي فإن عملية القسمة على أي عدد خلاف الصفر ممكنة دائماً في ح حيث أن $1 \div 1 = 1$ ، $1 \div 2 = \frac{1}{2}$ ، $2 \div 1 = 2$ أي أن عملية القسمة $1 \div 2$ تعني ضرب العدد 1 في المعكوس الضربي للمعد 2 أي أن عملية القسمة مفككة وليست أبدالية وليست دمجية ولا يوجد لها عنصر محايد أو معكوس

تذكر قاعدة فك الأقواس

إذا كان a, b عددين حقيقيين فإن :

$$1 = (1 -) - (1 -) \quad (1)$$

$$1 = (1 -) - (1 -) \quad (2)$$

$$1 = (1 -) - (1 -) \quad (3)$$



أمثلة توضيحية



أوجد ناتج ما يأتي في أبسط صورة :

$$2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \quad (1) \quad 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{5\sqrt{3}} + 5\sqrt{3}\right) 5\sqrt{3} \quad (3) \quad (4 + 3\sqrt{3}) 3\sqrt{3} \quad (4)$$

الحل

$$5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + (3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \quad (1)$$

$$12 = 2 \times 6 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times 2 \times 2 = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$3\sqrt{3} \times 4 + 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = (4 + 3\sqrt{3}) 3\sqrt{3} \quad (3)$$

$$3\sqrt{3} \times 4 + 6 = 3\sqrt{3} \times 4 + 2 \times 3 =$$

$$\frac{1}{5\sqrt{3}} \times 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = \left(\frac{1}{5\sqrt{3}} + 5\sqrt{3}\right) 5\sqrt{3} \quad (4)$$

$$32 = 2 + 30 = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} + 5 \times 3 \times 2 =$$



اعط تقديرًا لنتائج $(\sqrt{5} + 3) \times (\sqrt{8} + 1)$ وتحقق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة:



الحل

تقدير $\sqrt{5}$ هو ٢ $\therefore (\sqrt{5} + 3)$ تقديرها هو $5 = 2 + 3$

تقدير $\sqrt{8}$ هو ٣ $\therefore (\sqrt{8} + 1)$ تقديرها هو $4 = 3 + 1$

$\therefore (\sqrt{5} + 3)(\sqrt{8} + 1)$ تقديرها هو $20 = 4 \times 5$

باستخدام الآلة الحاسبة للتحقق من صحة الإجابة نجد أن الناتج 20.459 أي أن التقدير مقبول



تدريب (١)

أكمل لإيجاد ناتج ما يأتي:

$$\textcircled{1} \quad \dots\dots\dots = \sqrt{3} + \sqrt{3} \quad \textcircled{2} \quad \dots\dots\dots = \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \dots\dots\dots = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \quad \textcircled{4} \quad \dots\dots\dots = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$\textcircled{5} \quad \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = 1 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2}$$

تدريب (٢)

أوجد مفكوك كل مما يأتي:

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{2} + \dots\dots\dots = (\sqrt{2} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{2})$$

$$\textcircled{2} \quad \dots\dots\dots + 2 = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$$

$$\textcircled{3} \quad \dots\dots\dots = (\sqrt{2} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{2})$$

$$\textcircled{4} \quad 12 - \dots\dots\dots = 12 - (2 + \sqrt{2})$$



تمارين (٥)

على العمليات على الأعداد الحقيقية

ساعة امتحان ومراجعة



أولاً: راجع معنا واختبر نفسك



١) إذا كانت $3 = \sqrt{9}$ ، $16 = \sqrt{16}$ ، $4 = \sqrt{4}$ ، فأكمل ما يأتي:

$$\textcircled{1} \quad \dots\dots\dots = \sqrt{9} \quad \textcircled{2} \quad \dots\dots\dots = \sqrt{9}$$

$$\textcircled{3} \quad \dots\dots\dots = \sqrt{9} - \sqrt{9} \quad \textcircled{4} \quad \dots\dots\dots = \sqrt{9}$$



٤ درجات

ب) أوجد مجموعة حل المعادلة $(2 - 1) - 3 = 14 = 50$ في \mathbb{R}

.....

.....

.....

٢) اكتب $\sqrt{3}$ ينحصر بين ١,٧ و ١,٨

.....

.....

.....

٣ درجات

ج) حدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{2} + 1$ على خط الأعداد

.....

.....

.....

د) أوجد على صورة فترة مستعينة بخط الأعداد $[-3, 1] - [4, 1]$

.....

.....

.....

٣ درجات

ثانياً: اكتب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

٢ اكمل ما يأتي:

$$\dots\dots\dots = (11\sqrt{2}) + 11\sqrt{2} \quad \text{②}$$

$$\dots\dots\dots + 5 = 5 + 2\sqrt{2} \quad \text{①}$$

$$\dots\dots\dots = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \quad \text{③} \quad (\dots\dots\dots + \dots\dots\dots) + 5 = 3\sqrt{2} + 7 \quad \text{④}$$

$$\dots\dots\dots = 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \quad \text{⑥} \quad \dots\dots\dots = 3 - 5\sqrt{2} + 7 \quad \text{⑤}$$

$$\dots\dots\dots = 2\sqrt{2} \times \dots\dots\dots = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \quad \text{⑧} \quad \dots\dots\dots = (\sqrt{2} - 3) + (\sqrt{2} + 4) \quad \text{⑦}$$

⑨ المعكوس الجمعي للعدد $8\sqrt{2}$ هو⑩ المعكوس الجمعي للعدد $2\sqrt{2} - 1$ هو⑪ الحاصل الضربي في 2 هو⑫ المعكوس الضربي للعدد $\frac{2}{\sqrt{2}}$ هو

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

$$[3\sqrt{5} \text{ و } 3\sqrt{6} \text{ و } 3\sqrt{5} \text{ و } 3\sqrt{6}] \dots\dots\dots = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \quad \text{①}$$

$$[5\sqrt{5} \text{ و } 5\sqrt{2} \text{ و } 5 \text{ و } 5\sqrt{2}] \dots\dots\dots = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \quad \text{②}$$

$$\dots\dots\dots = 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} + 5 \quad \text{③}$$

$$[2\sqrt{6} + 1 \text{ و } 2\sqrt{8} + 1 \text{ و } 2\sqrt{7} + 1 \text{ و } 1]$$

$$[2 \text{ و } 3\sqrt{2} \text{ و } 3\sqrt{2} - 4 \text{ و } 2] \dots\dots\dots = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} - 4 \quad \text{④}$$

$$[3\sqrt{6} \text{ و } 3\sqrt{2} \text{ و } 2 \text{ و } 2\sqrt{2}] \dots\dots\dots = \frac{2}{3\sqrt{2}} \quad \text{⑤}$$

$$[5\sqrt{8} \text{ و } 5 \text{ و } 2 \text{ و } 2\sqrt{2}] \dots\dots\dots = 2(5\sqrt{2}) \quad \text{⑥}$$

⑦ المعكوس الجمعي للعدد $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})$ هو

$$[3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 4 \text{ و } 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \text{ و } 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \text{ و } 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}]$$

$$[4 \text{ و } 5 \text{ و } 3 \text{ و } 5\sqrt{2}] \dots\dots\dots = 5\sqrt{2} \div (5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) \quad \text{⑧}$$

④ ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

$$5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \quad \text{②} \quad 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \quad \text{①}$$

$$5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \quad \text{④} \quad 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \quad \text{③}$$

$$5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \quad \text{⑥} \quad 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \quad \text{⑤}$$

$$2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \quad \text{⑦} \quad 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \quad \text{⑧}$$

مسائل المستوى الثاني

⑤ ضع كل مما يأتي في أبسط صورة:

$$2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \quad \text{②} \quad 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} + 3 \quad \text{①}$$

$$2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} -) - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \quad \text{④} \quad 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \quad \text{③}$$

$$2\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \text{⑥} \quad 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \quad \text{⑤}$$

⑥ ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

$$3\sqrt{2} \times 4 \quad \text{②} \quad 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \quad \text{①}$$

$$2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \quad \text{④} \quad 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \quad \text{③}$$

$$2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \quad \text{⑥} \quad (5\sqrt{2} -) \times 5\sqrt{2} \quad \text{⑤}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \quad \text{⑧} \quad 3 + 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \quad \text{⑦}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \text{⑩} \quad 2\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \quad \text{⑨}$$

١١ أعط تقديراً لنتائج $(\sqrt{5} + 3) \times (\sqrt{8} + 1)$ و تحقق من صحة إجابتك

باستخدام الآلة الحاسبة

١٢ إذا كانت $\sqrt{5} = 2.236$ ، $\sqrt{8} = 2.828$ ، $\sqrt{10} = 3.162$ ، $\sqrt{15} = 3.873$ ، $\sqrt{20} = 4.472$ ، $\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{30} = 5.477$ ، $\sqrt{35} = 5.916$ ، $\sqrt{40} = 6.325$ ، $\sqrt{45} = 6.708$ ، $\sqrt{50} = 7.071$ ، $\sqrt{55} = 7.416$ ، $\sqrt{60} = 7.746$ ، $\sqrt{65} = 8.062$ ، $\sqrt{70} = 8.367$ ، $\sqrt{75} = 8.660$ ، $\sqrt{80} = 8.944$ ، $\sqrt{85} = 9.219$ ، $\sqrt{90} = 9.487$ ، $\sqrt{95} = 9.747$ ، $\sqrt{100} = 10$ ، $\sqrt{105} = 10.247$ ، $\sqrt{110} = 10.488$ ، $\sqrt{115} = 10.724$ ، $\sqrt{120} = 10.954$ ، $\sqrt{125} = 11.180$ ، $\sqrt{130} = 11.402$ ، $\sqrt{135} = 11.619$ ، $\sqrt{140} = 11.832$ ، $\sqrt{145} = 12.042$ ، $\sqrt{150} = 12.247$ ، $\sqrt{155} = 12.450$ ، $\sqrt{160} = 12.649$ ، $\sqrt{165} = 12.845$ ، $\sqrt{170} = 13.038$ ، $\sqrt{175} = 13.234$ ، $\sqrt{180} = 13.416$ ، $\sqrt{185} = 13.601$ ، $\sqrt{190} = 13.784$ ، $\sqrt{195} = 13.961$ ، $\sqrt{200} = 14.142$ ، $\sqrt{205} = 14.318$ ، $\sqrt{210} = 14.491$ ، $\sqrt{215} = 14.661$ ، $\sqrt{220} = 14.829$ ، $\sqrt{225} = 15$ ، $\sqrt{230} = 15.166$ ، $\sqrt{235} = 15.319$ ، $\sqrt{240} = 15.492$ ، $\sqrt{245} = 15.652$ ، $\sqrt{250} = 15.811$ ، $\sqrt{255} = 15.969$ ، $\sqrt{260} = 16.126$ ، $\sqrt{265} = 16.280$ ، $\sqrt{270} = 16.432$ ، $\sqrt{275} = 16.583$ ، $\sqrt{280} = 16.732$ ، $\sqrt{285} = 16.880$ ، $\sqrt{290} = 17.026$ ، $\sqrt{295} = 17.170$ ، $\sqrt{300} = 17.321$ ، $\sqrt{305} = 17.469$ ، $\sqrt{310} = 17.615$ ، $\sqrt{315} = 17.759$ ، $\sqrt{320} = 17.912$ ، $\sqrt{325} = 18.063$ ، $\sqrt{330} = 18.212$ ، $\sqrt{335} = 18.359$ ، $\sqrt{340} = 18.504$ ، $\sqrt{345} = 18.647$ ، $\sqrt{350} = 18.789$ ، $\sqrt{355} = 18.929$ ، $\sqrt{360} = 19.068$ ، $\sqrt{365} = 19.205$ ، $\sqrt{370} = 19.341$ ، $\sqrt{375} = 19.475$ ، $\sqrt{380} = 19.608$ ، $\sqrt{385} = 19.740$ ، $\sqrt{390} = 19.870$ ، $\sqrt{395} = 20.000$ ، $\sqrt{400} = 20.000$ ، $\sqrt{405} = 20.125$ ، $\sqrt{410} = 20.248$ ، $\sqrt{415} = 20.370$ ، $\sqrt{420} = 20.491$ ، $\sqrt{425} = 20.611$ ، $\sqrt{430} = 20.730$ ، $\sqrt{435} = 20.848$ ، $\sqrt{440} = 20.964$ ، $\sqrt{445} = 21.079$ ، $\sqrt{450} = 21.192$ ، $\sqrt{455} = 21.304$ ، $\sqrt{460} = 21.415$ ، $\sqrt{465} = 21.524$ ، $\sqrt{470} = 21.632$ ، $\sqrt{475} = 21.739$ ، $\sqrt{480} = 21.845$ ، $\sqrt{485} = 21.950$ ، $\sqrt{490} = 22.054$ ، $\sqrt{495} = 22.157$ ، $\sqrt{500} = 22.260$ ، $\sqrt{505} = 22.362$ ، $\sqrt{510} = 22.463$ ، $\sqrt{515} = 22.563$ ، $\sqrt{520} = 22.663$ ، $\sqrt{525} = 22.762$ ، $\sqrt{530} = 22.860$ ، $\sqrt{535} = 22.958$ ، $\sqrt{540} = 23.055$ ، $\sqrt{545} = 23.151$ ، $\sqrt{550} = 23.247$ ، $\sqrt{555} = 23.342$ ، $\sqrt{560} = 23.437$ ، $\sqrt{565} = 23.531$ ، $\sqrt{570} = 23.625$ ، $\sqrt{575} = 23.718$ ، $\sqrt{580} = 23.811$ ، $\sqrt{585} = 23.903$ ، $\sqrt{590} = 24.000$ ، $\sqrt{595} = 24.096$ ، $\sqrt{600} = 24.191$ ، $\sqrt{605} = 24.285$ ، $\sqrt{610} = 24.379$ ، $\sqrt{615} = 24.472$ ، $\sqrt{620} = 24.565$ ، $\sqrt{625} = 24.658$ ، $\sqrt{630} = 24.750$ ، $\sqrt{635} = 24.842$ ، $\sqrt{640} = 24.934$ ، $\sqrt{645} = 25.025$ ، $\sqrt{650} = 25.116$ ، $\sqrt{655} = 25.206$ ، $\sqrt{660} = 25.296$ ، $\sqrt{665} = 25.386$ ، $\sqrt{670} = 25.475$ ، $\sqrt{675} = 25.564$ ، $\sqrt{680} = 25.653$ ، $\sqrt{685} = 25.741$ ، $\sqrt{690} = 25.829$ ، $\sqrt{695} = 25.917$ ، $\sqrt{700} = 26.000$ ، $\sqrt{705} = 26.082$ ، $\sqrt{710} = 26.164$ ، $\sqrt{715} = 26.245$ ، $\sqrt{720} = 26.326$ ، $\sqrt{725} = 26.406$ ، $\sqrt{730} = 26.486$ ، $\sqrt{735} = 26.566$ ، $\sqrt{740} = 26.645$ ، $\sqrt{745} = 26.724$ ، $\sqrt{750} = 26.803$ ، $\sqrt{755} = 26.882$ ، $\sqrt{760} = 26.960$ ، $\sqrt{765} = 27.038$ ، $\sqrt{770} = 27.116$ ، $\sqrt{775} = 27.193$ ، $\sqrt{780} = 27.270$ ، $\sqrt{785} = 27.347$ ، $\sqrt{790} = 27.424$ ، $\sqrt{795} = 27.500$ ، $\sqrt{800} = 27.576$ ، $\sqrt{805} = 27.652$ ، $\sqrt{810} = 27.728$ ، $\sqrt{815} = 27.803$ ، $\sqrt{820} = 27.878$ ، $\sqrt{825} = 27.953$ ، $\sqrt{830} = 28.028$ ، $\sqrt{835} = 28.102$ ، $\sqrt{840} = 28.176$ ، $\sqrt{845} = 28.250$ ، $\sqrt{850} = 28.324$ ، $\sqrt{855} = 28.397$ ، $\sqrt{860} = 28.471$ ، $\sqrt{865} = 28.544$ ، $\sqrt{870} = 28.617$ ، $\sqrt{875} = 28.690$ ، $\sqrt{880} = 28.762$ ، $\sqrt{885} = 28.835$ ، $\sqrt{890} = 28.907$ ، $\sqrt{895} = 28.979$ ، $\sqrt{900} = 29.051$ ، $\sqrt{905} = 29.123$ ، $\sqrt{910} = 29.194$ ، $\sqrt{915} = 29.265$ ، $\sqrt{920} = 29.336$ ، $\sqrt{925} = 29.406$ ، $\sqrt{930} = 29.477$ ، $\sqrt{935} = 29.547$ ، $\sqrt{940} = 29.617$ ، $\sqrt{945} = 29.687$ ، $\sqrt{950} = 29.757$ ، $\sqrt{955} = 29.826$ ، $\sqrt{960} = 29.896$ ، $\sqrt{965} = 29.965$ ، $\sqrt{970} = 30.034$ ، $\sqrt{975} = 30.103$ ، $\sqrt{980} = 30.172$ ، $\sqrt{985} = 30.241$ ، $\sqrt{990} = 30.310$ ، $\sqrt{995} = 30.379$ ، $\sqrt{1000} = 30.458$ ، $\sqrt{1005} = 30.526$ ، $\sqrt{1010} = 30.595$ ، $\sqrt{1015} = 30.663$ ، $\sqrt{1020} = 30.731$ ، $\sqrt{1025} = 30.799$ ، $\sqrt{1030} = 30.867$ ، $\sqrt{1035} = 30.934$ ، $\sqrt{1040} = 31.001$ ، $\sqrt{1045} = 31.068$ ، $\sqrt{1050} = 31.135$ ، $\sqrt{1055} = 31.202$ ، $\sqrt{1060} = 31.268$ ، $\sqrt{1065} = 31.334$ ، $\sqrt{1070} = 31.400$ ، $\sqrt{1075} = 31.466$ ، $\sqrt{1080} = 31.531$ ، $\sqrt{1085} = 31.597$ ، $\sqrt{1090} = 31.662$ ، $\sqrt{1095} = 31.727$ ، $\sqrt{1100} = 31.792$ ، $\sqrt{1105} = 31.857$ ، $\sqrt{1110} = 31.922$ ، $\sqrt{1115} = 31.986$ ، $\sqrt{1120} = 32.051$ ، $\sqrt{1125} = 32.115$ ، $\sqrt{1130} = 32.179$ ، $\sqrt{1135} = 32.243$ ، $\sqrt{1140} = 32.307$ ، $\sqrt{1145} = 32.371$ ، $\sqrt{1150} = 32.435$ ، $\sqrt{1155} = 32.498$ ، $\sqrt{1160} = 32.561$ ، $\sqrt{1165} = 32.624$ ، $\sqrt{1170} = 32.687$ ، $\sqrt{1175} = 32.750$ ، $\sqrt{1180} = 32.813$ ، $\sqrt{1185} = 32.875$ ، $\sqrt{1190} = 32.938$ ، $\sqrt{1195} = 33.000$ ، $\sqrt{1200} = 33.062$ ، $\sqrt{1205} = 33.124$ ، $\sqrt{1210} = 33.186$ ، $\sqrt{1215} = 33.248$ ، $\sqrt{1220} = 33.309$ ، $\sqrt{1225} = 33.371$ ، $\sqrt{1230} = 33.432$ ، $\sqrt{1235} = 33.493$ ، $\sqrt{1240} = 33.554$ ، $\sqrt{1245} = 33.615$ ، $\sqrt{1250} = 33.676$ ، $\sqrt{1255} = 33.736$ ، $\sqrt{1260} = 33.797$ ، $\sqrt{1265} = 33.857$ ، $\sqrt{1270} = 33.917$ ، $\sqrt{1275} = 33.977$ ، $\sqrt{1280} = 34.037$ ، $\sqrt{1285} = 34.097$ ، $\sqrt{1290} = 34.157$ ، $\sqrt{1295} = 34.217$ ، $\sqrt{1300} = 34.277$ ، $\sqrt{1305} = 34.336$ ، $\sqrt{1310} = 34.396$ ، $\sqrt{1315} = 34.455$ ، $\sqrt{1320} = 34.515$ ، $\sqrt{1325} = 34.574$ ، $\sqrt{1330} = 34.633$ ، $\sqrt{1335} = 34.692$ ، $\sqrt{1340} = 34.751$ ، $\sqrt{1345} = 34.810$ ، $\sqrt{1350} = 34.869$ ، $\sqrt{1355} = 34.928$ ، $\sqrt{1360} = 34.987$ ، $\sqrt{1365} = 35.046$ ، $\sqrt{1370} = 35.104$ ، $\sqrt{1375} = 35.163$ ، $\sqrt{1380} = 35.221$ ، $\sqrt{1385} = 35.280$ ، $\sqrt{1390} = 35.338$ ، $\sqrt{1395} = 35.396$ ، $\sqrt{1400} = 35.454$ ، $\sqrt{1405} = 35.512$ ، $\sqrt{1410} = 35.570$ ، $\sqrt{1415} = 35.628$ ، $\sqrt{1420} = 35.686$ ، $\sqrt{1425} = 35.743$ ، $\sqrt{1430} = 35.801$ ، $\sqrt{1435} = 35.858$ ، $\sqrt{1440} = 35.915$ ، $\sqrt{1445} = 35.972$ ، $\sqrt{1450} = 36.029$ ، $\sqrt{1455} = 36.086$ ، $\sqrt{1460} = 36.143$ ، $\sqrt{1465} = 36.200$ ، $\sqrt{1470} = 36.257$ ، $\sqrt{1475} = 36.313$ ، $\sqrt{1480} = 36.370$ ، $\sqrt{1485} = 36.426$ ، $\sqrt{1490} = 36.482$ ، $\sqrt{1495} = 36.538$ ، $\sqrt{1500} = 36.594$ ، $\sqrt{1505} = 36.650$ ، $\sqrt{1510} = 36.706$ ، $\sqrt{1515} = 36.762$ ، $\sqrt{1520} = 36.817$ ، $\sqrt{1525} = 36.873$ ، $\sqrt{1530} = 36.928$ ، $\sqrt{1535} = 36.983$ ، $\sqrt{1540} = 37.038$ ، $\sqrt{1545} = 37.093$ ، $\sqrt{1550} = 37.148$ ، $\sqrt{1555} = 37.203$ ، $\sqrt{1560} = 37.258$ ، $\sqrt{1565} = 37.312$ ، $\sqrt{1570} = 37.367$ ، $\sqrt{1575} = 37.421$ ، $\sqrt{1580} = 37.476$ ، $\sqrt{1585} = 37.530$ ، $\sqrt{1590} = 37.584$ ، $\sqrt{1595} = 37.638$ ، $\sqrt{1600} = 37.692$ ، $\sqrt{1605} = 37.746$ ، $\sqrt{1610} = 37.800$ ، $\sqrt{1615} = 37.854$ ، $\sqrt{1620} = 37.908$ ، $\sqrt{1625} = 37.962$ ، $\sqrt{1630} = 38.016$ ، $\sqrt{1635} = 38.069$ ، $\sqrt{1640} = 38.123$ ، $\sqrt{1645} = 38.176$ ، $\sqrt{1650} = 38.230$ ، $\sqrt{1655} = 38.283$ ، $\sqrt{1660} = 38.336$ ، $\sqrt{1665} = 38.389$ ، $\sqrt{1670} = 38.442$ ، $\sqrt{1675} = 38.495$ ، $\sqrt{1680} = 38.548$ ، $\sqrt{1685} = 38.601$ ، $\sqrt{1690} = 38.654$ ، $\sqrt{1695} = 38.707$ ، $\sqrt{1700} = 38.760$ ، $\sqrt{1705} = 38.812$ ، $\sqrt{1710} = 38.865$ ، $\sqrt{1715} = 38.917$ ، $\sqrt{1720} = 38.969$ ، $\sqrt{1725} = 39.021$ ، $\sqrt{1730} = 39.073$ ، $\sqrt{1735} = 39.125$ ، $\sqrt{1740} = 39.177$ ، $\sqrt{1745} = 39.229$ ، $\sqrt{1750} = 39.281$ ، $\sqrt{1755} = 39.333$ ، $\sqrt{1760} = 39.385$ ، $\sqrt{1765} = 39.437$ ، $\sqrt{1770} = 39.488$ ، $\sqrt{1775} = 39.540$ ، $\sqrt{1780} = 39.592$ ، $\sqrt{1785} = 39.643$ ، $\sqrt{1790} = 39.694$ ، $\sqrt{1795} = 39.746$ ، $\sqrt{1800} = 39.797$ ، $\sqrt{1805} = 39.848$ ، $\sqrt{1810} = 39.899$ ، $\sqrt{1815} = 39.950$ ، $\sqrt{1820} = 40.001$ ، $\sqrt{1825} = 40.052$ ، $\sqrt{1830} = 40.103$ ، $\sqrt{1835} = 40.154$ ، $\sqrt{1840} = 40.205$ ، $\sqrt{1845} = 40.256$ ، $\sqrt{1850} = 40.307$ ، $\sqrt{1855} = 40.357$ ، $\sqrt{1860} = 40.408$ ، $\sqrt{1865} = 40.458$ ، $\sqrt{1870} = 40.509$ ، $\sqrt{1875} = 40.559$ ، $\sqrt{1880} = 40.609$ ، $\sqrt{1885} = 40.659$ ، $\sqrt{1890} = 40.709$ ، $\sqrt{1895} = 40.759$ ، $\sqrt{1900} = 40.809$ ، $\sqrt{1905} = 40.859$ ، $\sqrt{1910} = 40.909$ ، $\sqrt{1915} = 40.959$ ، $\sqrt{1920} = 41.009$ ، $\sqrt{1925} = 41.059$ ، $\sqrt{1930} = 41.109$ ، $\sqrt{1935} = 41.159$ ، $\sqrt{1940} = 41.209$ ، $\sqrt{1945} = 41.259$ ، $\sqrt{1950} = 41.309$ ، $\sqrt{1955} = 41.359$ ، $\sqrt{1960} = 41.409$ ، $\sqrt{1965} = 41.459$ ، $\sqrt{1970} = 41.509$ ، $\sqrt{1975} = 41.559$ ، $\sqrt{1980} = 41.609$ ، $\sqrt{1985} = 41.659$ ، $\sqrt{1990} = 41.709$ ، $\sqrt{1995} = 41.759$ ، $\sqrt{2000} = 41.809$ ، $\sqrt{2005} = 41.859$ ، $\sqrt{2010} = 41.909$ ، $\sqrt{2015} = 41.959$ ، $\sqrt{2020} = 42.009$ ، $\sqrt{2025} = 42.059$ ، $\sqrt{2030} = 42.109$ ، $\sqrt{2035} = 42.159$ ، $\sqrt{2040} = 42.209$ ، $\sqrt{2045} = 42.259$ ، $\sqrt{2050} = 42.309$ ، $\sqrt{2055} = 42.359$ ، $\sqrt{2060} = 42.409$ ، $\sqrt{2065} = 42.459$ ، $\sqrt{2070} = 42.509$ ، $\sqrt{2075} = 42.559$ ، $\sqrt{2080} = 42.609$ ، $\sqrt{2085} = 42.659$ ، $\sqrt{2090} = 42.709$ ، $\sqrt{2095} = 42.759$ ، $\sqrt{2100} = 42.809$ ، $\sqrt{2105} = 42.859$ ، $\sqrt{2110} = 42.909$ ، $\sqrt{2115} = 42.959$ ، $\sqrt{2120} = 43.009$ ، $\sqrt{2125} = 43.059$ ، $\sqrt{2130} = 43.109$ ، $\sqrt{2135} = 43.159$ ، $\sqrt{2140} = 43.209$ ، $\sqrt{2145} = 43.259$ ، $\sqrt{2150} = 43.309$ ، $\sqrt{2155} = 43.359$ ، $\sqrt{2160} = 43.409$ ، $\sqrt{2165} = 43.459$ ، $\sqrt{2170} = 43.509$ ، $\sqrt{2175} = 43.559$ ، $\sqrt{2180} = 43.609$ ، $\sqrt{2185} = 43.659$ ، $\sqrt{2190} = 43.709$ ، $\sqrt{2195} = 43.759$ ، $\sqrt{2200} = 43.809$ ، $\sqrt{2205} = 43.859$ ، $\sqrt{2210} = 43.909$ ، $\sqrt{2215} = 43.959$ ، $\sqrt{2220} = 44.009$ ، $\sqrt{2225} = 44.059$ ، $\sqrt{2230} = 44.109$ ، $\sqrt{2235} = 44.159$ ، $\sqrt{2240} = 44.209$ ، $\sqrt{2245} = 44.259$ ، $\sqrt{2250} = 44.309$ ، $\sqrt{2255} = 44.359$ ، $\sqrt{2260} = 44.409$ ، $\sqrt{2265} = 44.459$ ، $\sqrt{2270} = 44.509$ ، $\sqrt{2275} = 44.559$ ، $\sqrt{2280} = 44.609$ ، $\sqrt{2285} = 44.659$ ، $\sqrt{2290} = 44.709$ ، $\sqrt{2295} = 44.759$ ، $\sqrt{2300} = 44.809$ ، $\sqrt{2305} = 44.859$ ، $\sqrt{2310} = 44.909$ ، $\sqrt{2315} = 44.959$ ، $\sqrt{2320} = 45.009$ ، $\sqrt{2325} = 45.059$ ، $\sqrt{2330} = 45.109$ ، $\sqrt{2335} = 45.159$ ، $\sqrt{2340} = 45.209$ ، $\sqrt{2345} = 45.259$ ، $\sqrt{2350} = 45.309$ ، $\sqrt{2355} = 45.359$ ، $\sqrt{2360} = 45.409$ ، $\sqrt{2365} = 45.459$ ، $\sqrt{2370} = 45.509$ ، $\sqrt{2375} = 45.559$ ، $\sqrt{2380} = 45.609$ ، $\sqrt{2385} = 45.659$ ، $\sqrt{2390} = 45.709$ ، $\sqrt{2395} = 45.759$ ، $\sqrt{2400} = 45.809$ ، $\sqrt{2405} = 45.859$ ، $\sqrt{2410} = 45.909$ ، $\sqrt{2415} = 45.959$ ، $\sqrt{2420} = 46.009$ ، $\sqrt{2425} = 46.059$ ، $\sqrt{2430} = 46.109$ ، $\sqrt{2435} = 46.159$ ، $\sqrt{2440} = 46.209$ ، $\sqrt{2445} = 46.259$ ، $\sqrt{2450} = 46.309$ ، $\sqrt{2455} = 46.359$ ، $\sqrt{2460} = 46.409$ ، $\sqrt{2465} = 46.459$ ، $\sqrt{2470} = 46.509$ ، $\sqrt{2475} = 46.559$ ، $\sqrt{2480} = 46.609$ ، $\sqrt{2485} = 46.659$ ، $\sqrt{2490} = 46.709$ ، $\sqrt{2495} = 46.759$ ، $\sqrt{2500} = 46.809$ ، $\sqrt{2505} = 46.859$ ، $\sqrt{2510} = 46.909$ ، $\sqrt{2515} = 46.959$ ، $\sqrt{2520} = 47.009$ ، $\sqrt{2525} = 47.059$ ، $\sqrt{2530} = 47.109$ ، $\sqrt{2535} = 47.159$ ، $\sqrt{2540} = 47.209$ ، $\sqrt{2545} = 47.259$ ، $\sqrt{2550} = 47.309$ ، $\sqrt{2555} = 47.359$ ، $\sqrt{2560} = 47.409$ ، $\sqrt{2565} = 47.459$ ، $\sqrt{2570} = 47.509$ ، $\sqrt{2575} = 47.559$ ، $\sqrt{2580} = 47.609$ ، $\sqrt{2585} = 47.659$ ، $\sqrt{2590} = 47.709$ ، $\sqrt{2595} = 47.759$ ، $\sqrt{2600} = 47.809$ ، $\sqrt{2605} = 47.859$ ، $\sqrt{2610} = 47.909$ ، $\sqrt{2615} = 47.959$ ، $\sqrt{2620} = 48.009$ ، $\sqrt{2625} = 48.059$ ، $\sqrt{2630} = 48.109$ ، $\sqrt{2635} = 48.159$ ، $\sqrt{2640} = 48.209$ ، $\sqrt{2645} = 48.259$ ، $\sqrt{2650} = 48.309$ ، $\sqrt{2655} = 48.359$ ، $\sqrt{2660} = 48.409$ ، $\sqrt{2665} = 48.459$ ، $\sqrt{2670} = 48.509$ ، $\sqrt{2675} = 48.559$ ، $\sqrt{2680} = 48.609$ ، $\sqrt{2685} = 48.659$ ، $\sqrt{2690} = 48.709$ ، $\sqrt{2695} = 48.759$ ، $\sqrt{2700} = 48.809$ ، $\sqrt{2705} = 48.859$ ، $\sqrt{2710} = 48.909$ ، $\sqrt{2715} = 48.959$ ، $\sqrt{2720} = 49.009$ ، $\sqrt{2725} = 49.059$ ، $\sqrt{2730} = 49.109$ ، $\sqrt{2735} = 49.159$ ، $\sqrt{2740} = 49.209$ ، $\sqrt{2745} = 49.259$ ، $\sqrt{2750} = 49.309$ ، $\sqrt{2755} = 49.359$ ، $\sqrt{2760} = 49.409$ ، $\sqrt{2765} = 49.459$ ، $\sqrt{2770} = 49.509$ ، $\sqrt{2775} = 49.559$ ، $\sqrt{2780} = 49.609$ ، $\sqrt{2785} = 49.659$ ، $\sqrt{2790} = 49.709$ ، $\sqrt{2795} = 49.759$ ، $\sqrt{2800} = 49.809$ ، $\sqrt{2805} = 49.859$ ، $\sqrt{2810} = 49.909$ ، $\sqrt{2815} = 49.959$ ، $\sqrt{2820} = 50.009$ ، $\sqrt{2825$

العددان المترافقان

إذا كان a و b عددين نسبين موجبين :

فإن كل من العددين $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ ، $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ يعتبر مرافقاً للعدد الآخر وهما يختلفان في الإشارة بينهما وحاصل ضربهما دائماً عدد نسبي

أمثلة توضيحية

مثال ١ : اختصر المقدار $5\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ بعد وضع كل حد من حدوده على صورة $\sqrt{2}$

الحل

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} &= \sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 2 \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} &= \sqrt{2} \times 8\sqrt{2} = 2 \times 8\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} &= \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \\ \therefore 5\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 3\sqrt{2} &= 10\sqrt{2} - 16\sqrt{2} + 6\sqrt{2} \\ &= 0\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

مثال ٢ : اختصر المقدار $\frac{1}{4}\sqrt{12} - \frac{3}{5}\sqrt{4} + \frac{2}{3}\sqrt{6}$

الحل

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sqrt{12} &= \sqrt{3} \times \frac{1}{4} \times \sqrt{3} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \\ \frac{3}{5}\sqrt{4} &= \sqrt{4} \times \frac{3}{5} \times \sqrt{4} = 2 \times \frac{3}{5} \times 2 = \frac{12}{5} \\ \frac{2}{3}\sqrt{6} &= \sqrt{6} \times \frac{2}{3} \times \sqrt{6} = 2 \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{8}{3} \\ \therefore \frac{1}{4}\sqrt{12} - \frac{3}{5}\sqrt{4} + \frac{2}{3}\sqrt{6} &= \frac{3}{16} - \frac{12}{5} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{9}{48} - \frac{1152}{48} + \frac{1280}{48} \\ &= \frac{237}{48} = \frac{79}{16} \end{aligned}$$

$$\frac{79}{16}$$

العمليات على الجذور التربيعية

إذا كان a و b عددين حقيقيين غير سالبين فإن :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \quad (١)$$

فمثلاً :

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} &= \sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = \sqrt{2 \times 50} = \sqrt{100} = 10 \\ 2\sqrt{3} &= \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{a} \times \sqrt{1} \quad (٢)$$

فمثلاً :

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \sqrt{2} \times \sqrt{1} = \sqrt{2 \times 1} = \sqrt{2} \\ \sqrt{3} &= \sqrt{3} \times \sqrt{1} = \sqrt{3 \times 1} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad (٣) \quad a \neq 0$$

فمثلاً :

$$0 = \frac{1}{\sqrt{0}} = \frac{\sqrt{0}}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (٤) \quad a \neq 0, b \neq 0$$

فمثلاً :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

وتستخدم هذه القاعدة لجعل المقام عدداً نسبياً

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} \quad (٥)$$

فمثلاً :

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{2}{1} = \frac{2\sqrt{1}}{1} = \frac{\sqrt{4}}{1} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 \times 3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

ملاحظة

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b} , \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$



مثال ٥ اكتب شكلاً مما يأتي بحيث يكون المقام عدداً نسبياً :

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \quad ①$$

$$\frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \quad ②$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad ③$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad ④$$

الحل

$$\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ①$$

$$\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad ②$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \quad ③$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \cdot 3}{3 - 5} =$$

$$\frac{(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}{1 - 2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \times \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \quad ④$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 + 3 = \frac{\sqrt{2} \cdot 2 + 1 + 2}{1} =$$

مثال ٦ إذا كانت $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 5$ فأوجد قيمة $\frac{1}{5}$ 

الحل

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} =$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 = \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{1}{5} + 5 \therefore$$

المعادن لأبسط صورة $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{2}$

الحل

$$\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 2 =$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 2 =$$

$$(\sqrt{2} \cdot 2 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} \quad ①$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} \quad ②$$

$$(\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} - 2) \quad ③$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{2}) \quad ④$$

$$2(\sqrt{2} - \sqrt{2}) \quad ⑤$$

الحل

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} \quad ①$$

$$\sqrt{2} - 2 =$$

$$(\sqrt{2} \cdot 2 - \sqrt{2} \cdot 2) \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2} \cdot 2 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} \quad ②$$

$$(\sqrt{2} \cdot 2 - \sqrt{2} \cdot 2) \cdot \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 2 \times \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{2} \times 2 - \sqrt{2} \times 2 =$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 - 2 = \sqrt{2} \cdot 2 - 2 \cdot 2 =$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{2}) \quad ③$$

$$2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 =$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 - 2 =$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 2 \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times 2 + 2 \times 2 = (\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} - 2) \quad ④$$

$$2 = 2 - \sqrt{2} \cdot 2 - \sqrt{2} \cdot 2 + 4 =$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2 - \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2(\sqrt{2} - \sqrt{2}) \quad ⑤$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 - 2 = \sqrt{2} \cdot 2 - 2 + 2 =$$



Handwritten text at the top of the left page, possibly a title or header.

Handwritten text below the title, possibly a subtitle or introductory sentence.

Handwritten text in a box, possibly a definition or a key point.

Handwritten text below the boxed section.

Handwritten text in the middle left section, consisting of several lines.

Handwritten text in the middle right section, consisting of several lines.

Handwritten text below the middle right section.

Large handwritten text block in the lower middle left section, spanning several lines.

Handwritten text in a box at the bottom left, possibly a conclusion or summary.

Handwritten text below the boxed section at the bottom left.

Handwritten text at the bottom right of the left page.

Handwritten text in the bottom left corner.

Handwritten text in the bottom right corner.

Small handwritten text at the very bottom left.



Handwritten text at the top of the right page.

Handwritten text in a box at the top of the right page.

Handwritten text below the boxed section at the top of the right page.

Handwritten text in the middle right section, consisting of several lines.

Handwritten text in a box in the middle right section.

Handwritten text below the boxed section in the middle right section.

Handwritten text in the lower middle right section.

Handwritten text in a box in the lower middle right section.

Handwritten text below the boxed section in the lower middle right section.

Handwritten text in the bottom right section.

Handwritten text in a box at the bottom right.

Handwritten text below the boxed section at the bottom right.

Handwritten text in the bottom right corner.

Small handwritten text at the very bottom right.



$$2(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \text{ ⑥}$$

$$2(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \text{ ⑧}$$

$$(\sqrt{18} + \sqrt{12})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \text{ ⑩} \quad (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \sqrt{2} \text{ ⑨}$$

٨ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ ④}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \text{ ③}$$

$$\frac{1}{5\sqrt{2}} \text{ ②}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ①}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ ⑧}$$

$$\frac{5}{5\sqrt{2}} \text{ ⑦}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}} \text{ ⑥}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} \text{ ⑤}$$

٩ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً:

$$\frac{4}{5\sqrt{2} - \sqrt{2}} \text{ ④}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2} - 5\sqrt{2}} \text{ ③}$$

$$\frac{4}{5\sqrt{2} - 2} \text{ ②}$$

$$\frac{2}{1 + 3\sqrt{2}} \text{ ①}$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \text{ ⑧}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - \sqrt{2}} \text{ ⑦}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} \text{ ⑥}$$

$$\frac{5}{5\sqrt{2}} + 2 \text{ ⑤}$$

١٠ أوجد قيمة كلاً من س + ص ، س × ص في الحالات الآتية:

$$\text{①} \quad \sqrt{2} + 3 = \text{ص} , \quad \sqrt{2} - 1 = \text{س}$$

$$\text{②} \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} = \text{ص} , \quad \sqrt{2} - \sqrt{3} = \text{س}$$

$$\text{③} \quad \sqrt{2} + 5 = \text{ص} , \quad \sqrt{2} - 5 = \text{س}$$

$$\text{⑪} \quad \text{إذا كان } \sqrt{2} - \sqrt{2} = 1 , \quad \sqrt{2} + \sqrt{2} = \text{ص}$$

$$\text{فاوجد قيمة كلاً من } 1 + \text{ص} , \quad 1 - \text{ص}$$

[٢٠٢٠، ٢٠٢١]

$$\text{⑫} \quad \text{إذا كان } 1 - \sqrt{2} = \text{ص} , \quad 1 + \sqrt{2} = \text{س}$$

$$\text{فاوجد قيمة كلاً من } \text{ص} \times \text{س} , \quad \text{ص} - \text{س}$$

[٢٠٢٠، ٢٠٢١، ٢٠٢٢]



مسائل المستوى الثاني

٦ المختصر لأبسط صورة:

$$\text{①} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4 + 8\sqrt{2}} - \sqrt{2} \sqrt{13}$$

$$\text{②} \quad \frac{1}{5\sqrt{2}} - \sqrt{25\sqrt{2}} + \sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\text{③} \quad \frac{1}{5\sqrt{2}} \sqrt{5} - \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{5\sqrt{2}}$$

$$\text{④} \quad 5\sqrt{2} + \sqrt{\frac{2}{5}} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2}$$

$$\text{⑤} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{8 - 18\sqrt{2}} + \sqrt{2} \sqrt{2}$$

$$\text{⑥} \quad \sqrt{18} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} + \sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2}$$

$$\text{⑦} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{9 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{5\sqrt{2}}$$

$$\text{⑧} \quad \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{2} \sqrt{5} - \sqrt{\frac{2}{5}} \sqrt{2}$$

$$\text{⑨} \quad \frac{1}{8\sqrt{2}} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} - 5\sqrt{2} \sqrt{2}$$

$$\text{⑩} \quad \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} + \sqrt{2} \sqrt{2}$$

$$\text{⑪} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{14} + \sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{⑫} \quad \sqrt{\frac{2}{5}} \sqrt{8} - \sqrt{\frac{2}{5}} \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{12}$$

٧ أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$\text{①} \quad (\sqrt{5} + \sqrt{2}) \sqrt{2}$$

$$\text{②} \quad \left(\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2}$$

$$\text{③} \quad (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$\text{④} \quad (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$$



الاعتماد على العمل اليدوي المتدهور

۲۲) ادا نکائی سے $5\sqrt{3} + 3\sqrt{5} =$ ، $5\sqrt{5} - 7\sqrt{3} =$ ص

أورد القصة بكل من س - س - ص ٤ س س

[905 744]

۲۳) إذا كان $y = 3 + \sqrt{x}$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4x^{3/2}}$ ، من متوافقان

شم اوومد س^۱ + ۶ س

[४४]

٢٤) إذا كانت $\sqrt{5}y - \sqrt{11}y = 5$ ، $\sqrt{5}y + \sqrt{11}y = 11$ ،

اثبت ان $\frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(25) إذا كانت $x = 1 + \sqrt{3}$ ، $y = 1 - \sqrt{3}$ فأوجد قيمة $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

[1]

26) $\frac{\sqrt{a} \sqrt{a} + \sqrt{b} \sqrt{b}}{\sqrt{a}} = 1$ من ، $\frac{\sqrt{a} \sqrt{a} + \sqrt{b} \sqrt{b}}{\sqrt{b}} = 1$ اذا كانت من

اوجد قيمة كل من : ① $s^2 + s$ ② s من

اثبت ان $س^۱ + س^۲ = ۳۸$ س س

[५६ पृष्ठ]

٢٧) إذا كانت $\frac{y}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} = 1$ ، ص $\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 1$

الثبتان س، ص مترافقان ثم اوجد قيمة (س + ص) - س² - ص² [٧٤]



مسائل المتفوقين

(१११-१)

٢/ أوجد مرافق العدد $\sqrt{8} + \sqrt{18} - 5\sqrt{2}$

$$\left\{ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3} \right\}$$

٢٩) اجعل مقام الكسر $\frac{2 + \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2}}$ عدداً نسبياً



Umsatz

(۱۳) [۲] ادا کریں جس سے $\sqrt{7} + 2 = \sqrt{7}$ ، جس سے $2 - \sqrt{7}$ تاواندہ ہوئے

سے ۶ میں
میں میں

(۱۴)

۱۶) (۱) اسی سے $27 - 2 = 25$ ، $27 + 2 = 29$ اسی سے $25 = (5 \times 5)$

15) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$ کو آسان کرنے سے $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ =

(b)(7)(D)-(F)

فأورد قهمة لكل من س¹ ص¹ س² ص² س³ ص³ - ص⁴

(۱۶) $\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{7}$ ، $\sqrt{2} - \sqrt{5} = \sqrt{3}$ فاولیہ قیمة $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$ (۱۷)

$$\overline{r} - \overline{r} = 0, \quad \overline{r} + \overline{r} = 1 \text{ (mod } 2) \quad (17)$$

انہد ان مکلا من اء ب معکوس ضریبی لآخر

١٨) $\sqrt{v} + \sqrt{v} = 2\sqrt{v}$ ، $\frac{v}{\sqrt{v}} = \sqrt{v}$ فأوجد في أبسط صورة قيمة $\frac{\sqrt{v} + \sqrt{v}}{\sqrt{v}}$

(۶۹) $\sqrt{27} + \sqrt{27} = 2\sqrt{27}$ ، $\sqrt{27} - \sqrt{27} = 0$ ادا کے تحت

(7)

(٦) اوجه القيمة $\frac{3 \text{ سن سن}}{5 \text{ سن + سن}}$

[४४]

(۲) اوچد قیمة س^۱ + ۲ س^۲ س^۳ + س^۴

20. $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \text{ص}$ ، $\frac{1}{\sqrt{1} - \sqrt{1}} = \text{س}$ (بداً)

$$\left(\frac{F}{V} \right) \cdot (n)$$

اوحد قیمۃ کل من: (۱) س' ص'

(۲۶) إذا كانت $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ، $\sqrt{2}-\sqrt{3} = \text{ص}$

[५६, ७७, ७८]

اوجد قيمة لكل من: ① 'س' - 'س' 'س' ② ('س' - 'س')

العمليات على الجذور التكعيبية

إذا كان a, b عددين حقيقيين فإن:

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \times b} \quad (1)$$

فمثلاً:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{2} &= \sqrt[3]{5 \times 2} = \sqrt[3]{10} \\ \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} &= \sqrt[3]{2 \times 3} = \sqrt[3]{6} \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \quad (2)$$

فمثلاً:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{10} &= \sqrt[3]{2 \times 5} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} \\ 2 &= \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \times 4} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (3) \quad a \neq 0, b \neq 0$$

فمثلاً:

$$\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{12}{4}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad (4) \quad a \neq 0, b \neq 0$$

فمثلاً:

$$2 = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\frac{16}{4}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4}}$$

لاحظان:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a \times b}}{\sqrt[3]{b}}$$

فمثلاً:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{1 \times 4}}{\sqrt[3]{2 \times 4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

أمثلة توضيحية

مثال ١: ضم كلاً مما يأتي على صورة $\sqrt[3]{a}$ حيث a, b عدنان صحيحان
 a, b أصغر قيمة موجبة ممكنة

$$\sqrt[3]{1710} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{250} \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{16} \quad (3)$$

الحل:

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \times 8} = \sqrt[3]{2 \times 2^3} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2} \times 2 = 2\sqrt[3]{2} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2 \times 125} = \sqrt[3]{2 \times 5^3} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{2} \times 5 = 5\sqrt[3]{2} \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{1710} = \sqrt[3]{5 \times 342} = \sqrt[3]{5 \times 2 \times 171} = \sqrt[3]{5 \times 2 \times 3^3 \times 19} = \sqrt[3]{5 \times 2 \times 27 \times 19} = 3\sqrt[3]{190} \quad (3)$$

مثال ٢: اختصر لأبسط صورة المقدار $3\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{2} - 192\sqrt[3]{3} - 24\sqrt[3]{5}$

الحل:

$$\text{المقدار} = 3\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{2} - 192\sqrt[3]{3} - 24\sqrt[3]{5}$$

$$3\sqrt[3]{5^3} - \sqrt[3]{2} - 192\sqrt[3]{3} - 24\sqrt[3]{5} =$$

$$3\sqrt[3]{8} = 3\sqrt[3]{10} + 3\sqrt[3]{12} - 3\sqrt[3]{10} =$$

مثال ٣: اختصر لأبسط صورة المقدار $2(3 - \sqrt[3]{2}) - \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} + 72\sqrt[3]{2}$

الحل:

$$\text{المقدار} = 2(3 - \sqrt[3]{2}) - \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} + 72\sqrt[3]{2} =$$

$$6 - 2\sqrt[3]{2} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} + 72\sqrt[3]{2} =$$

$$6 - 2\sqrt[3]{2} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} + 72\sqrt[3]{2} =$$



الخطوة الأولى: تبسيط صورة المقادير



نكتب العمل

$$\begin{aligned} & \sqrt{8 \times 2} \times \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \sqrt{2} + \sqrt{2 \times 2} = \\ & \sqrt{16} \times \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{9} \sqrt{2} + \sqrt{4} = \\ & \frac{4}{3} \sqrt{16} - \frac{5}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{9} \sqrt{2} + 2 = \\ & \left(\frac{4}{3} \sqrt{16} - \frac{5}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{9} \sqrt{2} \right) + 2 = \\ & \frac{4}{3} \sqrt{16} - \frac{5}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{9} \sqrt{2} + 2 = \end{aligned}$$

أو بعد تبسيط (2 + 5√2 - 25√2) (2 + 5√2 - 25√2)

نكتب العمل

$$\begin{aligned} & \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{5 \sqrt{2} \times 2} - \sqrt{25 \sqrt{2} \times 2} + \sqrt{5 \sqrt{2} \times 2} + \sqrt{5 \sqrt{2} \times 2} - \sqrt{25 \sqrt{2} \times 2} = \\ & 12 = 8 + 5 = 8 + 5 \sqrt{2} - 25 \sqrt{2} + 5 \sqrt{2} + 5 \sqrt{2} - 25 \sqrt{2} = \end{aligned}$$

تمارين لتدريب

تدريب (1)

أختصر ما يأتي لأبسط صورة:

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \\ & \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \\ & \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \\ & \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \end{aligned}$$



الخطوة الأولى: راجع معنا وأختصر نفسك



ساعة امتحان ومراجعة



١) أختصر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين:

١) إذا كانت س عدداً صحيحاً وكان $\sqrt{7} > \sqrt{7} > 1$ فإن س =
[١ ٢ ٣ ٤ ٥]

٢) [٥٤٢] - [٣٤١] =

[[٥٤٣] ٤ [٥٤٣] ٤ [٢٤١] ٤ [٢٤١]]

٣) العدد التالي في النمط $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}$ هو

[٥٠٧ ٤ ٧٥٧ ٤ ٦٠٧ ٤ ٩٠٧]

٤) إذا كانت س = $\frac{2}{3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}}$ ، فإن س = $\frac{2}{3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}$ س + ص =

[٢ ٤ ١٢ ٤ ٢٠ ٤ (٣٧ - ٥٧)٢]



(ب) إذا كانت س = $2 + 3\sqrt{2}$ ، ص = $2 - 3\sqrt{2}$ فاوجد $\frac{س}{ص}$



(ج) إذا كان $1 - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ فاوجد قيمة $1 + (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)^2$





ثانياً: اجيب عما ياتي:

مسائل المستوى الأول

اعمل ما ياتي:

- = $4\sqrt{2} \times 1\sqrt{2}$ ① = $8 - \sqrt{2} + 1\sqrt{2}$ ②
 = $\frac{4}{9}\sqrt{2} \times \frac{1}{9}\sqrt{2}$ ③ = $2\sqrt{2} - 1\sqrt{2}$ ④
 = $2(\sqrt{2})$ ⑤ = $\frac{2\sqrt{2}}{8}$ ⑥
 = $128\sqrt{2} - 250\sqrt{2}$ ⑦ = $24\sqrt{2} - 125\sqrt{2}$ ⑧
 = $\frac{2}{9}\sqrt{2} + \frac{3}{1}\sqrt{2}$ ⑨ = $\frac{4}{10}\sqrt{2} \times \frac{2}{5}\sqrt{2}$ ⑩
 = $\frac{5}{12}\sqrt{2} - 50\sqrt{2}$ ⑪ = $100\sqrt{2} \times 10\sqrt{2}$ ⑫

المسائل الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

- = $24\sqrt{2} - 81\sqrt{2}$ ① [3 د 3 د 3 د 3 د 3 د]
 = $4\sqrt{2} + 135\sqrt{2}$ ② [5 د 5 د 5 د 5 د 5 د]
 = $9\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ ③ [3 د 3 د 3 د 3 د 3 د]
 = $\frac{81 - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ ④ [3 د 3 د 3 د 3 د 3 د]

ضع علامة مما ياتي على صورة $\sqrt{2}$ حيث ا ب عددان صحيحان
 ، ب أصغر قيمة موجبة ممكنة

- ① $54\sqrt{2}$
 ② $4\sqrt{2}$
 ③ $128\sqrt{2}$
 ④ $10000 - \sqrt{2}$
 ⑤ $\frac{10}{12}\sqrt{2}$
 ⑥ $1160 - \sqrt{2}$

المختصر لأبسط صورة:

- ① $54 - \sqrt{2} + 1\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$
 ② $54\sqrt{2} - 128\sqrt{2} + 250\sqrt{2}$
 ③ $24\sqrt{2} + 81 - \sqrt{2} + 3\sqrt{2}$
 ④ $192\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 81\sqrt{2}$

مسائل المستوى الثاني

أوجد في أبسط صورة:

- ① $2 - \sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} + 54\sqrt{2}$
 ② $\frac{1}{9}\sqrt{2} - 24 - \sqrt{2} + 81\sqrt{2}$
 ③ $2(3 - \sqrt{2}) + \frac{1}{9}\sqrt{2} - 243\sqrt{2}$
 ④ $2(2 - \sqrt{2}) - \frac{1}{4}\sqrt{2} + 256\sqrt{2}$
 ⑤ $18\sqrt{2} - 2(2\sqrt{2}) - \frac{1}{4}\sqrt{2} + 10 + 54 - \sqrt{2}$
 ⑥ $16 - \sqrt{2} + 28\sqrt{2} - \frac{14}{\sqrt{2}} + 54\sqrt{2}$
 ⑦ $54\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + 18\sqrt{2}$
 ⑧ $2\sqrt{2} + 250\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} + 200\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$
 ⑨ $\frac{7}{18\sqrt{2}} + 98\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} - 24 - \sqrt{2} + 81\sqrt{2}$
 ⑩ $16\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 54\sqrt{2} + 250\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 48\sqrt{2}$
 ⑪ $32\sqrt{2} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$

⑦ إذا كانت $\sqrt{2} = 3$ ، $\sqrt{2} = 3$ فاوجد (س ص 3) ⑦

[$\frac{1}{18}$]



تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية

أولاً: الأشكال الهندسية المستوية:

هي الأشكال التي يتكون كل منها من مجموعة جزئية من نقاط مستوى ما وفيما يلي ملخصاً للقوانين الهامة الخاصة بمحيط ومساحة هذه الأشكال:

الشكل	المحيط	المساحة
المثلث	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{1}{2}$ طول القاعدة \times الارتفاع العمودي عليها
متوازي الأضلاع	مجموع أطوال أضلاعه	طول القاعدة \times الارتفاع العمودي عليها
المستطيل	(الطول + العرض) $\times 2$	الطول \times العرض
المربع	طول الضلع $\times 4$	طول الضلع \times نفسه، $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره
المعين	طول الضلع $\times 4$	$\frac{1}{2}$ حاصل ضرب ضلعي القطر في طول القطر
شبه المنحرف	مجموع أطوال أضلاعه	طول القاعدة \times الارتفاع العمودي عليها
		$\frac{1}{2}$ مجموع ضلعي القاعدتين المتوازيين \times الارتفاع

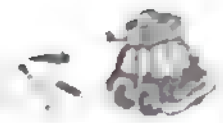
الدائرة



محيط الدائرة = $2\pi r$ نو وحدة طول

مساحة الدائرة = πr^2 نو وحدة مربعة

حيث نو طول نصف قطر الدائرة، π (النسبة التقريبية) = $\frac{22}{7}$ ما أنه ينظر غير ذلك



٨) تثبت أن $1 = (1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (1 + \sqrt{2}) - 2$

٩) أوجد ناتج كل مما يأتي:

١) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}) (\sqrt{2} - \sqrt{2})$
 ٢) $(\sqrt{2} - \sqrt{2}) (\sqrt{2} + \sqrt{2})$
 ٣) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}) (\sqrt{2} - \sqrt{2})$
 ٤) $(\sqrt{2} - \sqrt{2}) (\sqrt{2} + \sqrt{2})$

٥) $(1 + \sqrt{2}) (1 - \sqrt{2})$
 ٦) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}) (\sqrt{2} - \sqrt{2})$
 ٧) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}) (\sqrt{2} - \sqrt{2})$
 ٨) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}) (\sqrt{2} - \sqrt{2})$
 ٩) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}) (\sqrt{2} - \sqrt{2})$
 ١٠) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}) (\sqrt{2} - \sqrt{2})$

١١) تثبت أن $3 + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$ و $3 - \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$
 فاوجد قيمة: ١) $(3 + \sqrt{2}) (3 - \sqrt{2})$ ٢) $(3 - \sqrt{2}) (3 + \sqrt{2})$ ٣) $3 - \sqrt{2}$

١٢) تثبت أن $3 + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$ و $3 - \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$ فاوجد قيمة: $(\frac{3 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}) (\frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}})$



مسائل التفاضل

١٣) أوجد ناتج $(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2}) (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \sqrt{2})$

١٤) اجعل مقادير الكسور $\frac{2}{\sqrt{2}}$ عدداً نسبياً

١٥) إذا كان $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ فاوجد قيم $\frac{1}{\sqrt{2}}$ من الممكنة

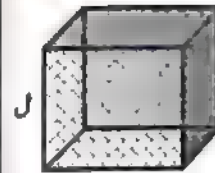


ثانياً : الأجسام أو المجسمات :

- الأجسام تتكون من مجموعة غير منتهية من النقاط وتشغل حيزاً من الفراغ
- أى جسم يقسم الفراغ إلى ثلاث مجموعات من النقاط :
(أ) مجموعة النقاط الواقعة داخل الجسم
(ب) مجموعة النقاط التى تحدد الجسم من الخارج وتسمى " بسطح الجسم "
(ج) مجموعة النقاط الواقعة خارج الجسم
- واتحاد المجموعتين (أ) ، (ب) يكون ما يسمى " حجم الجسم "
- وحدة العجوم : هى حجم مكعب طول حرفه ١ سم ،
وتوجد مضاعفات لهذه الوحدة مثل الليسيمتر المكعب والمتر المكعب

(١) المكعب

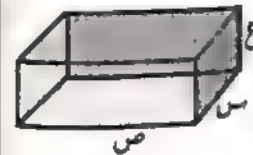
هو جسم جميع أوجهه الستة مربعة الشكل ومتطابقة
وإذا كان طول حرف المكعب ل وحدة طول فإن :



- ① مساحة الوجه = $ل^2$ (وحدة مربعة)
- ② المساحة الجانبية = $ل^2 \times 4$ (وحدة مربعة)
- ③ المساحة الكلية (مساحة أوجه الستة) = $ل^2 \times 6$ (وحدة مربعة)
- ④ حجم المكعب = $ل^3$ (وحدة مكعبة)

(٢) متوازى المستطيلات

هو جسم جميع أوجهه الستة مستطيلات وكل وجهين متقابلين متطابقين
وإذا كانت أطوال أحرافه س ، ص ، ع وحدة طول فإن :



- ① المساحة الجانبية = محيط القاعدة \times الارتفاع
 $2 \times (س + ص) \times ع$ (وحدة مربعة)
- ② المساحة الكلية = المساحة الجانبية + $2 \times$ مساحة القاعدة
 $2 \times (س \times ص + ص \times ع + ع \times س)$ (وحدة مربعة)
- ③ حجمه = مساحة القاعدة \times الارتفاع
 $س \times ص \times ع$ (وحدة مكعبة)

(٣) الأسطوانة الدائرية القائمة

هى جسم له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان كل منهما عبارة عن سطح دائرى
أما السطح الجانبى فهو سطح منحنى يسمى بالسطح الأسطوانى



- إذا كان طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة نى وارتفاعها ع فإن :
- ① المساحة الجانبية للأسطوانة = $2\pi نى ع$ (وحدة مربعة)
 - ② المساحة الكلية للأسطوانة = $2\pi نى ع + 2\pi نى^2$ (وحدة مربعة)
 - ③ حجم الأسطوانة = $\pi نى^2 ع$ (وحدة مكعبة)

(٤) الكرة

هى جسم سطحه منحنى وجميع النقاط التى تنتمى إلى سطح الكرة
تكون على أبعاد متساوية من نقطة ثابتة داخل الكرة تسمى مركز الكرة



- وإذا قطعت الكرة بمستوى مار بمركزها فإن المقطع دائرة مركزها
هو مركز الكرة وطول نصف قطرها هو طول نصف قطر الكرة
- ① مساحة سطح الكرة = $4\pi ر^2$ (وحدة مربعة)
 - ② حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi ر^3$ (وحدة مكعبة)

أمثلة توضيحية

① دائرة طول نصف قطرها ٣,٥ أوجد :

$$\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$$

- ① محيط الدائرة ② مساحة الدائرة

الحل

$$① \text{ محيط الدائرة } = 2\pi ر = 2 \times \frac{22}{7} \times 3,5 = 22$$

$$② \text{ مساحة الدائرة } = \pi ر^2 = \frac{22}{7} \times 3,5^2 = 38,5$$



مثال ٥ أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٨ سم ، طول قطر قاعدتها ١٤ سم أوجد :

$$\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$$

٢ مساحتها الجانبية

١ حجمها

الحل

$$\therefore 2 \text{ نى} = 14 \text{ سم} \quad \therefore 7 \text{ نى} = 7 \text{ سم}$$

$$\textcircled{1} \text{ حجم الأسطوانة} = \pi \times 7^2 \times 8 = 1232 \text{ سم}^3$$

$$\textcircled{2} \text{ مساحتها الجانبية} = 2\pi \times 7 \times 8 = 352 \text{ سم}^2$$



مثال ٦ احسب طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة الدائرية القائمة التي

$$\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$$

حجمها ٧٧٠ سم^٣ وارتفاعها ٥ سم

الحل

$$\therefore \text{حجم الأسطوانة} = \pi \times 7^2 \times 5$$

$$\therefore 770 = \pi \times 7^2 \times 5$$

$$\therefore 7 = \frac{7 \times 770}{5 \times 22} = 49 \text{ نى} \quad \therefore 7 = 7 \text{ سم}$$



مثال ٧ أوجد مساحة الكرة التي طول نصف قطرها ١ سم بدلالة π

ملاحظة

بدلالة π تعنى
أننا لا نعوض عن π

$$\text{مساحة الكرة} = 4\pi \times 1^2 = 4\pi \text{ سم}^2$$

الحل



مثال ٨ إذا كان طول نصف قطر كرة ٣ سم فأوجد حجمها

$$(3, 14 = \pi)$$

الحل

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \times 3^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 27 = 113.04 \text{ سم}^3$$



مثال ٢ دائرة مساحتها ٦١٦ سم^٢ أوجد محيطها

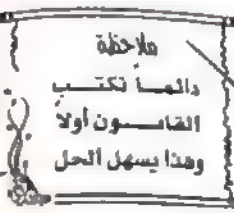
الحل

$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \pi \times 7^2$$

$$\therefore 616 = \pi \times 7^2$$

$$\therefore 14 = 7 \text{ نى} \quad \therefore 14 = 7 \text{ نى}$$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2\pi \times 7 = 88 \text{ سم}$$



مثال ٣ مكعب حجمه ٨ سم^٣ احسب مساحة وجهه ومساحته الكلية

الحل

$$\text{نفرض أن طول حرف المكعب} = 2 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{حجم المكعب} = 2^3$$

$$\therefore 8 = 2^3 \quad \therefore 2 = 2 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{مساحة وجهه} = 2^2 = 4 \text{ سم}^2$$

$$\text{المساحة الكلية للمكعب} = 6 \times 4$$

$$= 24 \text{ سم}^2$$



مثال ٤ متوازي مستطيلات بعدا قاعدته ٥ سم وارتفاعه ١٠ سم أوجد :

٣ حجمه

٢ مساحته الكلية

١ مساحته الجانبية

الحل

$$\text{محيط القاعدة} = (\text{الطول} + \text{العرض}) \times 2 = 22 \text{ سم}$$

$$\textcircled{1} \text{ المساحة الجانبية} = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= 22 \times 10 = 220 \text{ سم}^2$$

$$\textcircled{2} \text{ المساحة الكلية} = 2(5 \times 10 + 10 \times 6 + 6 \times 5)$$

$$= 2(50 + 60 + 30) = 280 \text{ سم}^2$$

$$\textcircled{3} \text{ الحجم} = \text{الطول} \times \text{العرض} \times \text{الارتفاع}$$

$$= 6 \times 10 \times 5 = 300 \text{ سم}^3$$



أشكال للتدريب

تدريب (١)

مكعب طول حرفه ٣ أوجد:

- ① حجمه ② مساحته الكلية

وكيف الحل

① حجم المكعب = = 3^3 (.....) = = ٢٧

② مساحته الكلية = = 6×3^2 = = ٥٤

تدريب (٢)

متوازي مستطيلات بعدا قاعدته ٥ و ٤ و ارتفاعه ٣ أوجد:

- ① حجمه ② مساحته الجانبية ③ مساحته الكلية

وكيف الحل

① حجم متوازي المستطيلات = الطول \times العرض \times الارتفاع = = ٦٠

② مساحته الجانبية = = $2 \times (4 + 5) \times 3$ = = ٥٤

③ مساحته الكلية = = $2 \times (4 \times 5 + 4 \times 3 + 5 \times 3)$ = = ١٤٦

④ مساحته الجانبية = = $2 \times (4 + 5) \times 3$ = = ٥٤

⑤ مساحته الكلية = = $2 \times (4 \times 5 + 4 \times 3 + 5 \times 3)$ = = ١٤٦

⑥ مساحته الجانبية = = $2 \times (4 + 5) \times 3$ = = ٥٤

تدريب (٣)

أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠ وطول نصف قطر قاعدتها ٧ أوجد:

① حجمها ② مساحتها الجانبية

($\frac{22}{7} = \pi$)

وكيف الحل

① حجم الأسطوانة = = $\pi \times 7^2 \times 10$ = = ١٥٤٠

② مساحتها الجانبية = = $2 \times 7 \times 10$ = = ١٤٠

③ مساحتها الجانبية = = $2 \times 7 \times 10$ = = ١٤٠

④ مساحتها الجانبية = = $2 \times 7 \times 10$ = = ١٤٠



١ كرة من الرصاص طول نصف قطرها ١٢ سم مساحتها الكلية ٤٤٠ سم^٢ وحولت إلى أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي ٤ سم احسب طول نصف قاعدة الأسطوانة ($\frac{22}{7} = \pi$)

وكيف الحل

حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (12)^3 = 2816 \pi$

∴ حجم الأسطوانة = $\pi r^2 h = \pi r^2 \times 4 = 2816 \pi$

حجم الأسطوانة = حجم الكرة

$\pi r^2 \times 4 = 2816 \pi$

∴ $r^2 = \frac{2816}{4} = 704$

∴ $r = \sqrt{704} = 26.5$

٢ قطعة من الورق على شكل مستطيل أ ب ح د فيه أ ب = ٤ سم ب ح = ٤ سم طويت على شكل أسطوانة دائرية قائمة بحيث ينطبق أ ب على د ح أوجد حجم الأسطوانة الناتجة ($\frac{22}{7} = \pi$)

وكيف الحل



محيط قاعدة الأسطوانة = ٤٤

$44 = 2\pi r$

$44 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$

∴ $r = 7$

حجم الأسطوانة = $\pi r^2 h = \pi \times 7^2 \times 4 = 196\pi$

$196 \times \frac{22}{7} = 196 \times 3.14 = 615.76$

∴ ١٩٦٠

تدريب (١٤)

اسطوانة دائرية قائمة حجمها $10,4 \text{ م}^3$ وارتفاعها 10 م
أوجد طول نصف قطر قاعدتها وأوجد المساحة الجانبية $\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$

الحل

حجم الاسطوانة =
..... = $\pi r^2 h$
..... =
..... =
..... =
..... =
..... =
..... =

تدريب (١٥)

إذا كان طول نصف قطر كرة $3,5 \text{ م}$
فأوجد حجم الكرة ومساحتها $\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$

الحل

حجم الكرة =
..... =
مساحة الكرة =
..... =

تدريب (١٦)

إذا كان حجم كرة $36 \pi \text{ م}^3$ فأوجد طول قطرها

الحل

حجم الكرة =
..... = 36π
..... = $36 \pi \times \dots$
..... =
..... =
..... =

..... = طول القطر

تمارين (٨) على تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية

أولاً: راجع معنا واختر نفسك

١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

① $\{0, 2\} \cap \{0, 2\} = \dots\dots\dots$

[$\{0\}$ د $\{2\}$ د $\{0, 2\}$ د $\{0, 2\}$]

② $\left| \frac{1}{4} \sqrt{2} - 2\sqrt{\frac{3}{4}} - 5\sqrt{2} \right| = \dots\dots\dots$

[$\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$ د $\sqrt{2}$ د $5\sqrt{2}$ د $-\sqrt{2}$]

③ إذا كانت $\frac{4}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}$ ، فإن قيمة $\frac{1}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}$ هي

[1 د 2 د 3 د 4]

④ مجموعة حل المعادلة $\frac{1}{x} = 9 - x^2$ هي 27 في 3 من

[ϕ د $\{6\}$ د $\{216\}$ د $\{36\}$]

٤

(ب) إذا كانت $\frac{5}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}$ ، فإن قيمة $\frac{1}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}$ هي

فأجب: إن $\frac{1}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}$ من عددين مترافقان وأوجد قيمة $\frac{1}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}$

٣

(ج) أوجد على صورة فترة مستعينة بخط الأعداد $[-1, \infty) \cup \{2, \infty\}$

٣



ثانياً: اجب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

٢ أوجد ما يأتي:

- ١ محيط الدائرة التي طول نصف قطرها ١٤ سم
- ٢ مساحة الدائرة التي طول نصف قطرها ٧ سم
- ٣ حجم مكعب طول حرفه ٢ سم
- ٤ المساحة الجانبية لمكعب طول حرفه ٣ سم
- ٥ المساحة الكلية لمكعب طول حرفه ٤ سم
- ٦ مساحة الكرة التي طول قطرها ٢ سم
- ٧ حجم أسطوانة طول نصف قطرها ٧ سم وارتفاعها ١٠ سم
- ٨ حجم متوازي مستطيلات أبعاده ٢ سم، ٣ سم، ٤ سم
- ٩ المساحة الجانبية لمتوازي مستطيلات محيط قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢ سم
- ١٠ المساحة الكلية لمتوازي مستطيلات بعد قاعدته ٢ سم، ٣ سم وارتفاعه ١٠ سم



مسائل المستوى الثاني

٣ اكمل كلاً مما يأتي:

ملاحظة: $\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$ ما لم يذكر غير ذلك

- ١ مساحة الدائرة التي طول نصف قطرها $\sqrt{7}$ سم = سم
- ٢ إذا كانت مساحة دائرة ٢٥ π سم فإن طول نصف قطرها = سم
- ٣ مكعب حجمه ٦٤ سم فإن مساحته الكلية = سم
- ٤ مكعب مساحته الكلية ٥٤ سم فإن طول حرفه = سم
- ٥ إذا كان حجم مكعب ٢٧ سم فإن مساحة أحد أوجهه = سم
- ٦ الكرة التي طول نصف قطرها يساوي ١ سم يكون حجمها مساوياً
- ٧ الكرة التي حجمها $\frac{9}{4} \pi$ سم يكون طول نصف قطرها سم

٨ الكرة التي طول نصف قطرها $\frac{3}{\pi\sqrt{7}}$ سم تكون مساحتها = سم

٩ أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٠ سم وحجمها 2880π سم فإن طول نصف قطر قاعدتها يساوي سم

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

- ١ مكعب حجمه ٨ سم فإن مساحته الجانبية = سم
- ٢ [٢ د ٤ د ١٦ د ٢٤ د]
- ٣ إذا كانت المساحة الكلية للمكعب ٩٦ سم فإن مساحة الوجه الواحد = سم
- ٤ [٢٤ سم د ١٦ سم د ١٦ سم د ٤٨ سم]
- ٥ حجم المكعب الذي طول حرفه ٤ سم = سم
- ٦ [١٦ سم د ٦٤ سم د ٩٦ سم د ٢٤ سم]
- ٧ إذا كان حجم كرة هو $3\sqrt{3} \pi$ سم فإن طول نصف قطرها = سم
- ٨ [٣ سم د ٣ سم د ٣ سم د ٣ سم]
- ٩ طول نصف قطر الكرة التي حجمها 36π سم هو سم
- ١٠ [١ سم د ٢ سم د ٣ سم د ٤ سم]
- ١١ كرة حجمها $\frac{4}{3} \pi$ سم فإن طول قطرها = سم
- ١٢ [١ سم د ٢ سم د ٣ سم د $\frac{1}{4}$ سم]
- ١٣ حجم كرة طول قطرها ٦ سم = سم
- ١٤ [٤ سم د ٣٦ سم د ٢٨٨ سم د ١٢ سم]
- ١٥ إذا كانت مساحة دائرة 2π سم فإن طول نصف قطرها = سم
- ١٦ [١ د ٢ د ٢ د ٤ د]
- ١٧ إذا كانت المساحة الجانبية لأسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها ١١ سم هي 8π سم فإن ارتفاعها = سم
- ١٨ [١٠ سم د ٨ سم د ٤ سم د ١٦ سم]
- ١٩ أسطوانة ارتفاعها يساوي طول قطر قاعدتها فإن حجمها = سم
- ٢٠ [$\frac{4}{3} \pi$ سم د π سم د $\frac{1}{3} \pi$ سم د 2π سم]



- ٧) أوجد حجم كرة طول نصف قطرها $\sqrt{17}$ [٢٨٨]
- ٢) أوجد طول نصف قطر كرة حجمها $\pi 36$ [٢٣]
- ٣) كرة مساحتها $\pi 36$ أوجد طول نصف قطرها ثم أوجد حجمها [٢٣٦٤٢]
- ٤) كرة حجمها $\frac{\pi 500}{3}$ أوجد طول نصف قطرها [٢٥]
- ٥) أوجد طول قطر الكرة التي حجمها 4988 [٢, ١٤١ = π] [٢١٠]
- ٦) أوجد الحجم ومساحة السطح لكرة طول قطرها $4,2$ [٢٥٥, ٤٤١ ٢٨, ٨٨٨]
- ٧) كرة حجمها $\pi 562,5$ أوجد مساحة سطحها بدلالة π [٢٣٢٢٥]
- ٨) وضعت كرة داخل مكعب طول حرفه 14 سم فمست أوجهه الستة أوجد النسبة بين حجم الكرة وحجم المكعب [٢١١١]
- ٩) كرة حجمها $\pi 36$ وضعت داخل مكعب فمست أوجه المكعب الستة أوجد طول نصف قطر الكرة وحجم المكعب [٢٣٦١٤ ٢٣]
- ١٠) كرة من المعدن طول نصف قطرها 3 سم صهرت وحولت إلى أسطوانة طول نصف قطر قاعدتها 3 سم احسب ارتفاع الأسطوانة [٢٤]

- ٨) ١) أوجد حجم أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها 20 سم وطول نصف قطر قاعدتها 7 سم [٢٣٨٠]
- ٢) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها 14 سم وطول نصف قطر قاعدتها 10 سم أوجد المساحة الجانبية للأسطوانة [٢٨٨٠]
- ٣) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها 5 سم وحجمها $\pi 125$ أوجد طول قطر قاعدتها [٢١٠]
- ٤) أسطوانة دائرية قائمة حجمها $\pi 500$ سم وطول نصف قطر قاعدتها 5 سم أوجد ارتفاعها [٢٢٠]
- ٥) إذا كان حجم أسطوانة دائرية قائمة هو 1540 سم وارتفاعها 10 سم فأوجد طول نصف قطر قاعدتها ومساحتها الكلية [٢٧٨٤ ٢٧]



- ١١) طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة حجمها $\pi 40$ سم وارتفاعها 10 سم يساوي [١ ٢ ٣ ٤ ٥]
- ١٢) متوازي المستطيلات الذي أبعاده $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ من السنتيمترات يكون حجمه = [٢٧ ١٨ ٢٧ ٦ ٣٦ ٦]

- ٥) ١) دائرة طول نصف قطرها 7 سم أوجد محيط الدائرة ومساحتها [٢١٤٤ ٢٤٤]
- ٢) دائرة محيطها 22 سم أوجد مساحة هذه الدائرة [٢٢٨, ٥]
- ٣) دائرة مساحتها $9,54$ سم أوجد طول نصف قطرها [٢٠, ٧]
- ٤) دائرة مساحتها 154 سم أوجد محيط هذه الدائرة [٢٤٤]
- ٥) مربع مساحة سطحه 12 سم أوجد طول ضلعه [٢٦٧٢]

٦) في الشكل المقابل :



أ ب قطر نصف الدائرة فإذا كانت مساحة هذه المنطقة 77 سم أوجد محيط الشكل [٢٣١]



٧) في الشكل المقابل :
الدائرتان متحدتان في المركز م
طول نصف قطريهما 3 سم و 5 سم
أوجد مساحة الجزء المظلل بدلالة π

[٢٣١١]

- ٦) ١) مكعب طول حرفه 5 سم أوجد حجمه ومساحته الكلية [٢١٥٤ ٢١٥٠]
- ٢) مكعب حجمه 8 سم أوجد مساحة أحد أوجهه [٢٤]
- ٣) أوجد طول حرف مكعب حجمه $15 \frac{5}{8}$ سم [٢٢, ٥]
- ٤) مكعب حجمه 1000 سم احسب مساحته الكلية [٢٦٠]
- ٥) مكعب حجمه 64 سم أوجد مساحته الجانبية [٢٦٤]
- ٦) إذا كان طول حرف مكعب يساوي طول نصف قطر الكرة التي حجمها $\pi 36$ سم أوجد المساحة الكلية للمكعب [٢٥٤]

[٢٥٤]



٦ إذا كان حجم أسطوانة دائرية قائمة $\pi \times 64$ وكان ارتفاعها = طول نصف قطرها
أوجد ارتفاعها [٣٤]

٧ احسب طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة الدائرية القائمة التي حجمها
٧٥٣٦ π وارتفاعها ٢٤ π (٣١٤ = π) [٣٥]

٨ أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها ٤٤ π وارتفاعها ٥ π أوجد حجمها
[٣٧٧]

٩ أيهما أكبر حجماً أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧ π
وارتفاعها ١٠ π أم مكعب طول حرفه ١١ π [الأسطوانة]

١٠ قطعة من النحاس على شكل أسطوانة دائرية قائمة مصمتة طول
نصف قطر قاعدتها ٦ π وارتفاعها ٨ π صهرت وحولت إلى كرة مصمتة
أوجد طول نصف قطر الكرة [٣٦]

١١ قطعة من الشيكولاتة على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر
قاعدتها ١١ π وارتفاعها ١٠,٥ π صهرت وحولت إلى ٣ مكعبات متساوية الحجم
أوجد طول حرف المكعب الواحد [٣١١]

١٢ أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٠ π أوجد طول نصف قطر قاعدتها إذا علم أن
حجمها يساوي $\frac{4}{3}$ حجم كرة طول قطرها ٣٠ π [٣١٢]

١٣ قطعة من الورق على شكل مستطيل AB فيه $AB = 10$ π ، $B = 44$ π
طويت على شكل أسطوانة دائرية قائمة بحيث ينطبق AB على h
أوجد حجم الأسطوانة الناتجة [٣١٣]

٩ ١ متوازي مستطيلات بُعِدَ قاعدته ٣ π ، ٤ π وارتفاعه ٦ π أوجد :

١ حجمه ٢ مساحته الجانبية ٣ مساحته الكلية [٣١٤، ٣١٥، ٣١٦]

٢ متوازي مستطيلات ارتفاعه ١٠ π وحجمه ٣٦٠ π أوجد مساحة قاعدته
وإذا كان طول أحد أضلاع قاعدته = ٩ π فأوجد :

١ مساحته الجانبية ٢ مساحته الكلية [٣١٧]



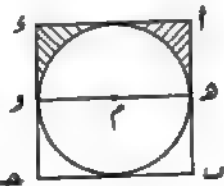
٣ قطعة من الرصاص على شكل متوازي مستطيلات أطوال أحرفه ٢٤ π ، ٢١ π
صهرت وصنع من مادتها المنصهرة كرة أوجد طول نصف قطر الكرة [٣١٨]

٤ أيهما أكبر حجماً مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ π أم متوازي مستطيلات
أبعاده ٢٧ π ، ٢٥ π ، ٥ π من المستقيمات [متوازي المستطيلات]



مسائل المتفوقين

١٠ في الشكل المقابل :



الدائرة M مرسومة داخل المربع $ABCD$ وإذا
كانت مساحة الجزء المظلل هو $10\frac{5}{9}\pi$
أوجد محيط هذا الجزء $(\frac{22}{7} = \pi)$

١١ قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل بُعِدَها ٢٥ ، ١٥ π قطع من كل ركن
من أركانها الأربعة مربع طول ضلعه ٤ π ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضاً
على شكل متوازي مستطيلات أوجد حجمه ومساحته الكلية [٣١٩، ٣٢٠]

١٢ صندوق من الزجاج على شكل مكعب بدون غطاء طول حرفه الخارجي ٦ π
فإذا كان سمك الزجاج المصنوع منه الصندوق يساوي ١ π
فأوجد حجم الزجاج المستخدم لصناعة الصندوق [٣٢١]

١٣ متوازي مستطيلات أبعاده ٣ π ، ٥ π ، ٧ π احسب متوازي المستطيلات في أوضاع
مختلفة من حيث اختيار القاعدة . هل تختلف المساحة الجانبية من وضع إلى آخر ؟

١٤ كرة جوفاء من المعدن طول نصف قطرها الداخلي ٢١ π
وطول نصف قطرها الخارجي ٣٠,٥ π أوجد كتلتها لأقرب جرام علماً
بأن السنتيمتر المكعب من هذا المعدن كتلته ٢٠ جم $(\frac{22}{7} = \pi)$

حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح

أولاً : حل المعادلات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح

المعادلة : هي جملة رياضية تحتوي على متغير (مجهول) مثل x وتحتوي على علامة التساوي مثل $x+3=1$ وتسمى معادلة من الدرجة الأولى حيث المتغير (المجهول) x مرفوعاً للقوة الأولى (الأس ١) وحل المعادلة هو إيجاد العدد الذي يجعل طرفي المعادلة متساويين $x+3=1$ نجد أن العدد ٢ هو الذي يجعل طرفي المعادلة متساويين $x+3=1$ نجد أن العدد ٢ هو الذي يجعل طرفي المعادلة متساويين في المعادلة $x+3=1$ نجد أن العدد ٢ هو الذي يجعل طرفي المعادلة متساويين ليجمع الطرفين متساويين في هذه الحالة نقول أن ٢ حل للمعادلة

ثانياً : حل المتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح

المتباينة : هي الجملة الرياضية التي تحتوي على متغير مثل $x > 3$ وتتضمن علاقة $x > 3$ ، $x < 3$ ، $x \geq 3$ ، $x \leq 3$ وحل المتباينة هو مجموعة العناصر التي يحقق كل منها المتباينة والخواص التالية تستخدم لحل المتباينات في ح :

- ① يمكن إضافة أو طرح عدد ثابت من طرفي المتباينة دون أن يتغير اتجاه
 - ② يمكن ضرب أو قسمة طرفي المتباينة على عدد ثابت موجب دون أن يتغير اتجاه
 - ③ يمكن ضرب أو قسمة طرفي المتباينة على عدد ثابت سالب مع تغيير اتجاه
- أي أن إذا كان a, b, c ثلاث أعداد حقيقية $a > b$ فإن :
- $a + c > b + c$ ، $a - c > b - c$
 - $a > b$ ، $a > 0$ ، $b > 0$ إذا كانت a عند موجب
 - $a < b$ ، $a < 0$ ، $b < 0$ إذا كانت a عند سالب

أمثلة توضيحية

مثال ١ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة $x-2=4$ ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

نحاول أن نجعل x في طرف بمفردها لذلك نتخلص من الرقم المجموع أو المطروح ثم الرقم المضروب x من

$$x-2=4 \quad (\text{إضافة ٢ إلى طرفي المعادلة})$$

$$x=4+2 \quad (\text{بالقسمة على ١})$$

$$x=6 \quad \therefore x=6$$



مثال ٢ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلات الآتية مع التمثيل على خط الأعداد

الحل

$$① \quad x-3=4$$

$$x=4+3$$

$$x=7$$

$$\therefore x=7$$

$$\therefore x=7$$

$$\therefore x=7$$



$$② \quad x+3=5$$

$$x=5-3$$

$$x=2$$

$$\therefore x=2$$



مثال ٣ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة $3x+2=5$ ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

$$3x=5-2$$

$$3x=3$$

$$\therefore x=1$$

$$\therefore x=1$$



حل المعادلات والمتباينات في ح

② $3 - 2 \leq 7$ (بالضافة (-3) للطرفين)

$3 - 2 - 3 \leq 7 - 3$

$1 \leq 4$ (بالقسمة على (-2))

$1 \leq 2$ (لاحظ تغير اتجاه علامة المتباينة)

$1 \leq 2$ (لاحظ تغير اتجاه علامة المتباينة)

(لاحظ أنه)
عند ضرب أو قسمة طرفي
المتباينة على عدد سالب
نعكس اتجاه علامة المتباينة



أووجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية في ح على صورة فترة
ثم مثل الحل على خط الأعداد:
① $3 \geq 2 + 1$ ② $5 \leq 3 - 2$

(بالضافة (-1) إلى طرفي المتباينة)

① $3 \geq 2 + 1$

$3 - 1 \geq 2 + 1 - 1$

(بالقسمة على 2)

$1 \geq 1$

$1 \geq 1$

$1 \geq 1$



(بالضافة (-2) إلى طرفي المتباينة)

② $5 \leq 3 - 2$

$5 - 2 \leq 3 - 2 - 2$

(بقسمة الطرفين على (-3))

$3 \leq 3$

$3 \leq 3$

$3 \leq 3$



ملاحظة

إذا طلب مجموعة الحل للمتباينة السابقة في ط أو في ص فتكون بهذا الشكل:
مجموعة حل هذه المتباينة في ط $\{0, 1, 2\}$
مجموعة حل هذه المتباينة في ص $\{1, 2, 3\}$

المعادلة في المتباينات



$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$



$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{1} \times \frac{2}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

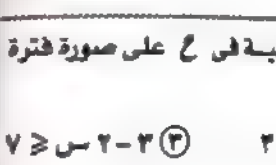
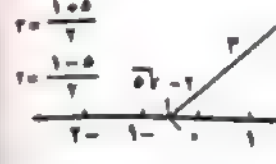
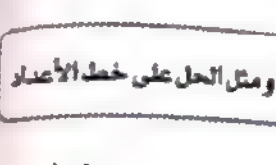
$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$



$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

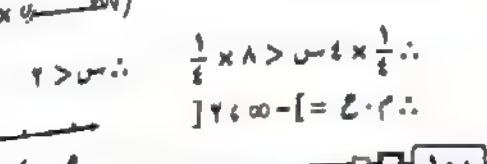
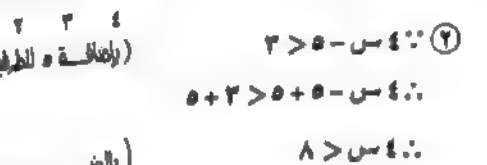
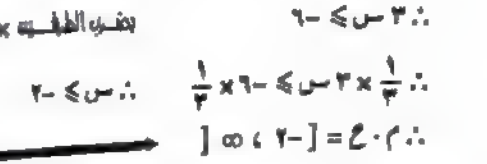
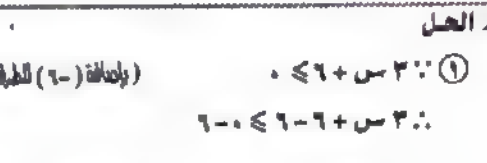
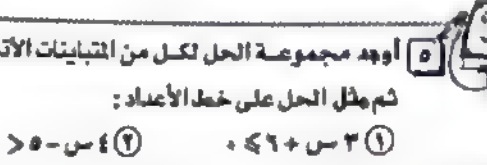
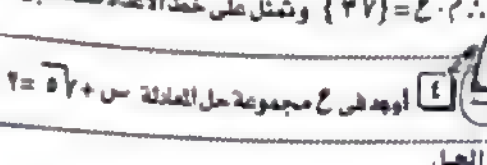
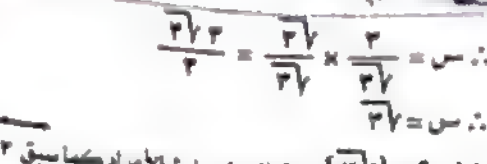
$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$



مثال

مثال

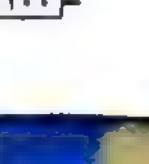
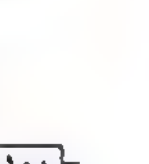
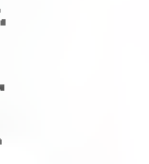
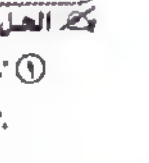
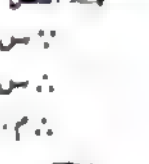
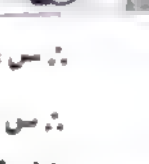
مثال

مثال

مثال

مثال

مثال



$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

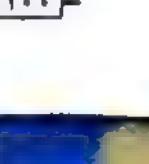
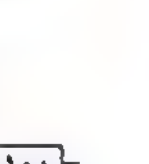
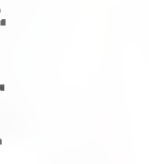
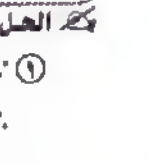
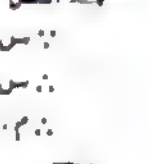
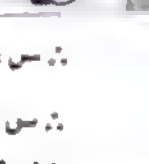
$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$



$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

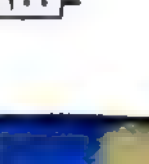
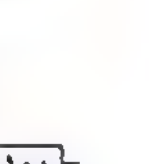
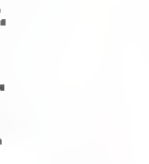
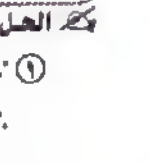
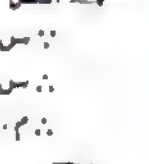
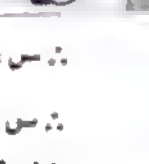
$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$



$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

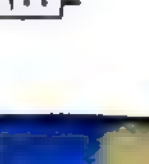
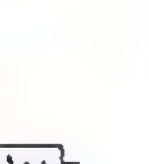
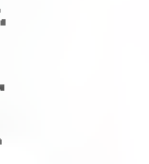
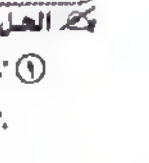
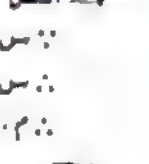
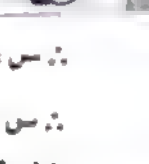
$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$



$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

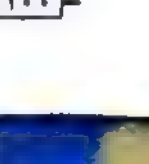
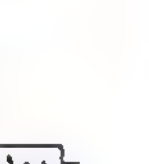
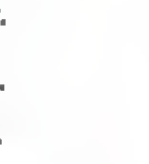
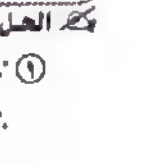
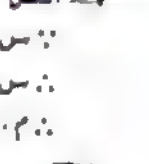
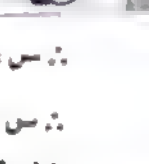
$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$



$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

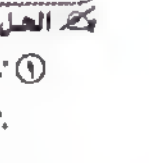
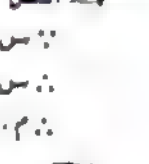
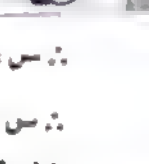
$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$





أوجد على صورة فترة مجموعة الحل في ح للمتباينة الآتية:

$$\frac{4-س}{3} > \frac{3-س}{2}$$



الحل

(نضرب الطرفين × ٦)

$$\frac{4-س}{3} > \frac{3-س}{2}$$

(إضافة (-١٠) س) للطرفين

$$٨-س > ٩-س$$

(إضافة (٩) للطرفين)

$$٨ > ٩-س$$

(بالقسمة على ٢)

$$١ > ٢-س$$

$$] \frac{1}{2}, \infty[= ح.م$$

$$\frac{1}{2} > س$$

حل المتباينة ٥ + س > ٢ + س + ٩ > س في ح



ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

$$٥ + س > ٢ + س + ٩ > س$$

$$٥ + س - س > ٢ + س - س + ٩ > س - س$$

$$٥ > ٢ + س > ٩$$

$$٥ - ٢ > ٢ + س - ٢ > ٩ - ٢$$

$$٣ > س > ٧$$

$$]٣, ٧[= ح.م$$



حل المتباينة الآتية في ح ثم مثل الحل على خط الأعداد:



$$٨ + س ≤ ٤ - س - ١ < ٢ + س$$

الحل

نلاحظ أن معاملات س مختلفة في الأطراف الثلاثة للمتباينة لذلك نقسم المتباينة إلى متباينتين وهما:

$$٨ + س ≤ ٤ - س - ١$$

ثم نوجد مجموعة التقاطع لمجموعة الحل له

حل المعادلات والمتباينات في ح



$$\begin{aligned} ١) \quad ٨ + س &≤ ٤ - س - ١ & ٢) \quad ٤ - س - ١ < ٢ + س \\ ٨ + س - س &≤ ٤ - س - ١ - س & ٤ - س - ١ - س < ٢ + س - س \\ ٨ &≤ ٤ - ٢ - ٢س & ١ < ١ - س \\ ٨ &≤ ٢ - ٢س & ١ + ١ < ١ - س - ١ \\ ٨ + ٢س &≤ ٢ - ٢س + ٢س & ٢ < -س \\ ٨ + ٢س &≤ ٢ & ٢ < -س \\ ٨ + ٢س - ٢س &≤ ٢ - ٢س + ٢س & ١ < -س \\ ٨ &≤ ٢ & ١ < -س \end{aligned}$$

$$١ < س ≤ ٣$$

$$[٣, ١[= ح.م$$



أمثلة للتدريب

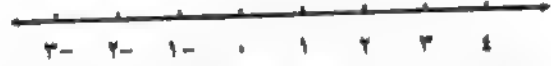
تدريب (١)

أكمل لإيجاد مجموعة حل المعادلة الآتية في ح مع التمثيل على خط الأعداد

$$١ = ٥ - س$$

$$..... = س$$

$$..... = ح.م$$



وتمثل على خط الأعداد

تدريب (٢)

حل المتباينة ٢ - س ≥ ٣ في ح ثم مثل الحل على خط الأعداد

الحل

$$٢ - س ≥ ٣$$

$$٢ - س - ٢ ≥ ٣ - ٢$$

$$-س ≥ ١$$

$$..... = ح.م$$



تدريب (٣)

حل المتباينة ٨ - ٣ - س < ١ و مثل الحل على خط الأعداد

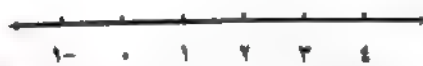
الحل

$$٨ - ٣ - س < ١$$

$$٥ - س < ١$$

$$..... < س$$

$$..... = ح.م$$



$$..... = ح.م$$



تدريب (4)

حل المتباينة $7 - س < 8 + س$ في $س$ ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

$$7 - س < 8 + س$$

(نحل المتباينة في طرف واحد في طرف)

$$7 - س < 8 + س$$

(بالقوة على)

$$7 - س < 8 + س$$

$$7 - س < 8 + س$$



تدريب (5)

حل المتباينة $3 \geq 2 + س > 1$ في $س$ ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

$$3 \geq 2 + س > 1$$

(بالقوة (.....) إلى أطراف المتباينة الثلاثة)

$$3 \geq 2 + س > 1$$

(بالقوة على)

$$3 \geq 2 + س > 1$$

$$3 \geq 2 + س > 1$$

$$3 \geq 2 + س > 1$$



تدريب (6)

حل المتباينة $4 - س > 2 - س > 1 + س$ في $س$ ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

$$4 - س > 2 - س > 1 + س$$

(بالقوة (.....) إلى أطراف المتباينة)

$$4 - س > 2 - س > 1 + س$$

$$4 - س > 2 - س > 1 + س$$

$$4 - س > 2 - س > 1 + س$$

$$4 - س > 2 - س > 1 + س$$

$$4 - س > 2 - س > 1 + س$$



تمارين (9)

على حل المعادلات و المتباينات في ح

أهتة الزاوية

أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

ساعة امتحان ومراجعة



(1) اكمل كلاً مما يأتي:

① $38\sqrt{2}$ ينحصر بين العددين الصحيحين ،

② المساحة الجانبية لتوازي مستطيلات محيط قاعدته $10\sqrt{2}$ وارتفاعه $2\sqrt{2}$ =

③ أبسط صورة للمقدار $18\sqrt{2} + 3\sqrt{\frac{1}{3}} - 8\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$ هي

④ $[2, 4] \cap [-3, 2] =$

درجات

(ب) كرة من المعدن طول قطرها $6\sqrt{2}$ صهرت وحوئت إلى اسطوانة دائرية

قائمة طول نصف قطر قاعدتها $3\sqrt{2}$ احسب ارتفاع الأسطوانة

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

درجات

(ج) إذا كان $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2$ فأوجد قيمة $(س + س - 1)^2$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

درجات



ثانياً: اجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

٢ أوجد في E مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

٢٢ $3 = 4 + x$

١ $1 = 6 + x$

٢٣ $10 = x - 4$

٢ $4 = 3 - x$

٢٤ $7 = x - 2 - 3$

٣ $5 = 1 - x$

٣ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية في E ومثل الحل على خط الأعداد :

٢٥ $x > 2$

٢٦ $x \geq 4$

١ $x < 3$

٢٧ $x \geq 5$

٢٨ $x > 2$

٢٩ $x > 1$

٢٩ $11 > x - 3$

٣٠ $11 \leq x + 5$

٣١ $7 > x + 2$

٣٢ $16 > x - 4$

٣٣ $\frac{1}{4} \geq x + 1$

٣٤ $9 \geq x - 1$

٣٥ $1 - x \geq 5$

٣٦ $1 \leq x - 2$

٣٧ $7 \leq x + 1$

٣٨ $x \leq 4$

٣٩ $x + 2 \leq 5$

٤٠ $8 \leq x - 6$

٤ اكمل ما يأتي :

١ مجموعة حل المعادلة $3 = x$ في E هي وفي E هي

٢ مجموعة حل المعادلة $x + 2 = 1$ في E هي وفي E هي

٣ إذا كانت مجموعة حل المعادلة $x + 2 = 6$ في E هي $\{2\}$ فإن $1 = \dots$

٤ إذا كانت $x + 2 = 4$ فإن $x = 2$ مجموعة الأعداد

٥ مجموعة حل المتباينة $x < 3$ في E هي

٦ مجموعة حل المتباينة $x \leq 2$ في E هي

٧ مجموعة حل المتباينة $x \leq 2$ في E هي

٨ مجموعة حل المتباينة $3 \geq x > 5$ في E هي

٩ مجموعة حل المتباينة $x - 2 \geq x + 1 > 8$ في E هي

١٠ إذا كانت $[-4, \infty)$ هي مجموعة حل المتباينة $x \geq 1$ فإن $1 = \dots$



٥ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين فيما يأتي :

١ مجموعة حل المعادلة $2 = 3 - x$ في E هي

[$\{4\}$ ، $\{10\}$ ، $\{5\}$ ، \emptyset]

٢ مجموعة حل المعادلة $2 = 3 - x$ في E هي

[$\{4\}$ ، $\{10\}$ ، $\{5\}$ ، \emptyset]

٣ إذا كانت $2 = 1 - x$ فإن $x = \dots$

[\emptyset ، $\{1\}$ ، $\{5\}$ ، $\{3\}$]

٤ العنصر ٣ ينتمي إلى مجموعة حل المتباينة

[$x > 2$ ، $x \geq 3$ ، $x < 3$ ، $x + 2 > 3$]

٥ مجموعة حل المتباينة $x < 7$ في E هي

[$[-7, \infty)$ ، $[-7, \infty)$ ، $[-7, \infty)$ ، $[-7, \infty)$]

٦ مجموعة حل المتباينة $x > 1$ في E هي

[$\{1\}$ ، $\{1\}$ ، $\{1\}$ ، $\{1\}$]

٧ إذا كانت $x \in [-2, \infty)$ فإن العبارة تمثل المتباينة

[$x < 2$ ، $x \leq 2$ ، $x > 2$ ، $x \geq 2$]

٨ إذا كانت $x + 1 \leq 3$ فإن $x \in \dots$

[$[-2, \infty)$ ، $[-2, \infty)$ ، $[-2, \infty)$ ، $[-2, \infty)$]

٩ مجموعة حل المتباينة $x - 1 \geq 1$ في E هي

[$[-2, \infty)$ ، $[-2, \infty)$ ، $[-2, \infty)$ ، $[-2, \infty)$]

مسائل المستوى الثاني

٦ أوجد في E مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

٢١ $\frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x}$

٢٢ $2 = 4 - x$

٢٣ $1 = 1,4 + x$

٢٤ $\frac{1}{x} = 5 - \frac{1}{x}$

٢٥ $11 = 8 + (x - 2)3$

٢٦ $6 = (x + 5)2$

٢٧ $2 = 6 - (3 - x)2$

٢٨ $5 + 1 = (1 - x)2$



٧ أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

$$٢ = ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٢$$

$$١ = ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ١$$

$$٢ = ٤ - ٣\sqrt{٧} \quad ٤$$

$$٥ = ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٣$$

$$٩ = ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ١$$

$$٥ = ٢ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

٨ أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

$$\sqrt{٣} = ٢ - ٣\sqrt{٧} \quad ١$$

$$\sqrt{٥} = ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ١$$

$$١ = \sqrt{٢} + ٣\sqrt{٧} \quad ٤$$

$$٢ = \sqrt{٣} + ٣\sqrt{٧} \quad ٣$$

$$\sqrt{٢} = \sqrt{٦} - ٣\sqrt{٧} \quad ٦$$

$$\sqrt{٢} = \sqrt{٢} + ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$\sqrt{١٢} = (١ + ٣)\sqrt{٧} \quad ٨$$

$$\sqrt{٣} = \sqrt{٣} - ٣\sqrt{٧} \quad ٧$$

$$\sqrt{٥} + ٢ = \sqrt{٥} + ٣\sqrt{٧} \quad ١٠$$

$$\sqrt{٢} = (١ - ٣)\sqrt{٧} \quad ٩$$

٩ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية في ح ومثل الحل على خط الأعداد :

$$٢ > ٣ + ٣\sqrt{٧} \quad ٦ \geq ٢ + ٣\sqrt{٧} \quad ١$$

$$٥ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٣ > ٢ - ٣\sqrt{٧} \quad ٣$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$

$$٢ < ٣ - ٣\sqrt{٧} \quad ٧ > ١ - ٣\sqrt{٧} \quad ٥$$



$$]٥٢-]$$

$$١٥ - ١ - ٣ \leq ٢ - ٣$$

$$]٢٤١-]$$

$$٢ + ٢ \leq ٣ + ٣ \leq ٢ + ٥$$

$$]١٤٠[$$

$$١ + ٣ \geq ١ - ٣$$

$$]١٤٢-]$$

$$٢ + ٤ \geq ٢ + ٥$$

$$]٧٤٠[$$

$$٢ + ٥ \geq ٢ + ٥$$

$$]٢٤٠[$$

$$١٥ - ١ - ٣ > ٢ - ٣$$

$$]١٤٢[$$

$$٢ + ١١ \geq ٢ + ٥$$

$$]٢٤٢[$$

$$١ + ٤ \geq ٢ - ٣$$



مسائل المتفوقين

١١ أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية حيث $٣ \in ح$:

$$١ \quad \frac{٨ - ٣}{٢} < \frac{٢(٤ + ٣)}{٢}$$

$$]٧٠-٤٥٠[$$

$$٢ \quad \frac{٣ + ٣}{٤} \geq \frac{١ - ٣}{٢} \geq \frac{٣ + ٧}{٤}$$

$$]٥-٤٧[$$

$$٣ \quad \frac{٣ - ٣}{٢} \geq \frac{٤}{٢} + ٣ > \frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢}$$

$$]١-٤٢[$$

١٢ إذا كان $١٠,٥$ [هي مجموعة حل المتباينة $١ > ٢ - ٣$ ب أوجد قيمة ١ ، ب

$$]٨=٥,٢=١[$$

١٣ هل $\sqrt{٥}$ ينتمي لمجموعة حل أي متباينة مما يأتي مع الأثبات ؟

$$١ \quad ٧ > ٣ - ٣ \quad ٢ \quad ١ > ١ - ٣$$

$$٣ \quad \frac{٣ - ٣}{٢} > \frac{٤}{٢} + ٣ > \frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢}$$

اختبارات (١)

اختبارات مراجعة على ما سبق

نموذج (١)

اختبار مراجعة على ما سبق

أدخل ما يأتي:

١- $[1, 1.5] \cup [0.5, 1] = \dots$

٢- قيمة العدد $\sqrt{11}$ أقرب جزء من مائة هو

٣- مجموعة حل المعادلة $x^2 - 8 = 0$ في \mathbb{R} هي

٤- نصف قطر الكرة التي حجمها $\frac{4}{3}\pi$ هو

٥- إذا كانت $x > \sqrt{2}$ و $x > 1$ حيث $x \in \mathbb{R}$ فإن $x = \dots$

درجت

٢- أمثل العدد $1 + \sqrt{2}$ على خط الأعداد

(ب) إذا كانت $x = 2 - \sqrt{2}$ و $x = 2 + \sqrt{2}$

فأثبت أن $x + y = (x - y)^2$

درجت

٣- أوجد مجموعة الحل في \mathbb{R} لكل مما يأتي:

١- $x + 3 \leq x + 2 \leq x - 2$

٢- $|x - 2| = \sqrt{2} - 2$

نموذج (٢)

اختبار مراجعة على ما سبق

أدخل ما يأتي:

١- $[4, 3] \cap [5, 1] = \dots$

٢- إذا كانت $x > \sqrt{2}$ و $x > 1$ حيث $x \in \mathbb{R}$ فإن $x = \dots$

٣- انتصار $\sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2}$ في أبسط صورة هو

٤- مجموعة حل المتباينة $x^2 + 2 \leq 5$ هي $x \in \dots$

درجت



٢- (أ) حدد المنطقة التي تمثل العدد $\sqrt{2} - 1$ على خط الأعداد

(ب) اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٥ سم وحجمها $\frac{4}{3}\pi$ أوجد طول قطرها

٣- (أ) أوجد مجموعة حل المعادلة $\sqrt{x} - 1 = 4$ وامل الحل على خط الأعداد

(ب) إذا كانت $x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ و $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

فأوجد قيمة $x^2 + y^2 + xy$

نموذج (٣)

اختبار مراجعة على ما سبق

١- أختار الإجابة الصحيحة من بين القوسين:

١- $\sqrt{3} \in \dots$ [٤, ٣] [١, ٠] [٢, ١] [٣, ٠]

٢- إذا كانت $x \in [2, 4]$ فإن $x^2 \in \dots$

[٤, ٤] [٢, ٠] [٤, ٠] [٠, ٤]

٣- إذا كانت المساحة الكلية للمكعب ٩٦ سم^٣ فإن مساحة الوجه الواحد =

[٢٤] [١٦] [١٢] [٤٨]

٤- مجموعة حل المتباينة $x^2 - 1 \geq 0$ هي $x \geq 1$ و $x \leq -1$ هي

[١, ١] [٢, ٠] [٢, ٠] [٢, ١]

٥- $\sqrt{25} = \dots$ [٥] [١٥] [١٢٥] [٥]

٢- (أ) أوجد مستقيماً يخط الأعداد $[-2, 3] \cup [4, \infty)$

(ب) إذا كانت $x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ و $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

فأوجد قيمة $x^2 + y^2 + xy$

٣- (أ) أوجد مجموعة حل المتباينة $x^2 + 2 < 5$ و $x < 1$ و $x < 3$ و $x < 11$

(ب) اسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٦ سم^٣ وارتفاعها ٦ سم أوجد مساحتها الكلية



العلاقة بين متغيرين

الوحدة الثانية

إذا فرضنا أن مدرسة مشتركة قررت عمل رحلة علمية يكون عدد المشاركين فيها ٢٠ وكان عدد البنات = س وعدد البنين = ص فإن $س + ص = ٢٠$ أي أن عدد البنات + عدد البنين = ٢٠، ونلاحظ أنه كلما تغير عدد البنات يتغير عدد البنين فيمكن أن يكون عدد البنات (س) = ١٠ وعدد البنين (ص) = ١٠ أي أن $١٠ + ١٠ = ٢٠$ أو عدد البنات = ٦ وعدد البنين = ١٤ فيكون المجموع ٢٠، أو عدد البنات = ٩ فيكون عدد البنين = ١١ لذلك نقول أن هناك علاقة بين عدد البنات وعدد البنين فكلما تغير عدد البنات يتغير عدد البنين والعكس صحيح كلما تغير عدد البنين يتغير عدد البنات بحيث يكون مجموعهما ٢٠ ونلاحظ أنه يوجد عديدين يتغير أحدهما فيتغير الآخر وهما س، ص لذلك يسميان "متغيرين" وتسمى العلاقة بينهما "العلاقة بين متغيرين"

والصورة العامة للعلاقة بين متغيرين س، ص تكون على الصورة

$$س + ص = ح$$

حيث $س \neq ٠$ ، $ص \neq ٠$

وتسمى علاقة خطية بين المتغيرين س، ص وتمثل بيانياً بخط مستقيم

ويمكن إيجاد مجموعة من الأزواج المرتبة (س، ص) تحقق العلاقة فمثلاً : في العلاقة السابقة بين عدد البنات وعدد البنين حيث $س + ص = ٢٠$ فإننا يمكن إيجاد بعض الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة مثل (١٠، ١٠) ، (٦، ١٤) ، (٩، ١١) ، (٥، ١٥) ونلاحظ أن كل زوج مرتب يكون مجموع س + ص فيه يساوي ٢٠



ملاحظات

- أي زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يحقق العلاقة الخطية (يجعلها عبارة صحيحة أي يجعل طرفها الأيمن = طرفها الأيسر) يعتبر حلاً لهذه العلاقة
- العلاقة بين متغيرين (مجهولين) لها عدد لا نهائي من الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة ولتمثيل العلاقة بين متغيرين بيانياً فإننا نأخذ زوجين مرتبين يحققان العلاقة ونمثلهما بنقطتين في مستوى ديكارتي ثم نرسم مستقيم يمر بهاتين النقطتين فيكون المستقيم هو التمثيل البياني لها، ونوجد زوجاً مرتباً ثالثاً للتأكد من صحة التمثيل
- كل نقطة \in الخط المستقيم الممثل للعلاقة يمثلها زوج مرتب يحقق العلاقة
- الخط المستقيم الممثل للعلاقة $س + ص = ح$ يمر بنقطة الأصل إذا كان $ح = ٠$
- إذا كانت $س = ٠$ فإن العلاقة تصبح على الصورة $ص = ح$ ويمثلها مستقيم يوازي محور السينات
- إذا كانت $ص = ٠$ فإن العلاقة تصبح على الصورة $س = ح$ ويمثلها مستقيم يوازي محور الصادات
- العلاقة $س = ٠$ يمثلها محور السينات
- العلاقة $ص = ٠$ يمثلها محور الصادات

أمثلة توضيحية

١ أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق العلاقة $س + ص = ٣$ ومثلها بيانياً

الحل

لسهولة إيجاد الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة نجعل ص في طرف وباقي حدود العلاقة في الطرف الآخر لتكون في صورة يسهل التعويض فيها $\therefore س + ص = ٣ \therefore س = ٣ - ص$

ثم نعوض عن س بعدة أرقام لنوجد قيمة ص في العلاقة في صورتها الجديدة

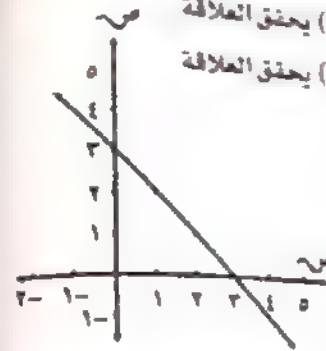


عندما $s = 0$: $3 = 0 - 2 = -2$: يحقق العلاقة (3, 0)

عندما $s = 1$: $2 = 1 - 2 = -1$: يحقق العلاقة (2, 1)

عندما $s = 2$: $1 = 2 - 2 = 0$: يحقق العلاقة (1, 2)

عندما $s = 3$: $0 = 3 - 2 = 1$: يحقق العلاقة (0, 3)



ثم نرسم محوري الإحداثيات في المستوى الديكارتي ونمثل عليه الأزواج المرتبة بنقط كما بالشكل ونصل بين النقاط بخط مستقيم فيكون هو التمثيل البياني للعلاقة

مثال ٢ مثل بيانياً العلاقة $s = 2 + 5t$

الحل

ملاحظة

يمكن إيجاد حلين للمعادلة بالتعويض عن $s = 0$ وإيجاد قيمة t ثم التعويض عن $t = 0$ وإيجاد قيمة s

لسهولة الحل نجعل s في طرف و t في طرف ثم نعوض في أحدهما لإيجاد الآخر ويفضل أن يكون المتغير الذي معاملته 1 في الطرف الأيمن

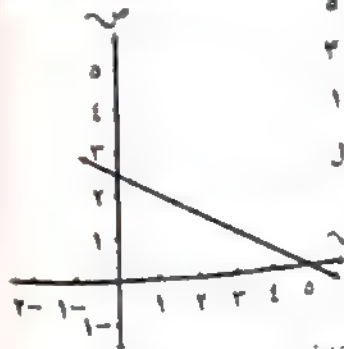
عندما $s = 0$: $0 = 2 + 5t$: $t = -\frac{2}{5}$

عندما $s = 1$: $1 = 2 + 5t$: $t = -\frac{1}{5}$

عندما $s = 2$: $2 = 2 + 5t$: $t = 0$

ويمكن وضع الحلول الثلاثة في جدول

س	٥	٣	١
ت	٠	١	٢



ملاحظة : الخط المستقيم يمر بنقطة الأصل إذا كان الحد المطلق يساوي صفراً إذا كان $s + 2 = 0$ صفراً



مثل بيانياً المستقيم الذي يمثل العلاقة $s + 2 = 12$ وإذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات في النقطة أ ويقطع محور الصادات في النقطة ب فأوجد مساحة $\triangle AOB$ حيث O هي نقطة الأصل

الحل

ملاحظة

يفضل اختيار أرقام تصلح للتعويض حتى يقبل البسط القسمة على المقام

لسهولة إيجاد الحلول نكتب المعادلة

في صورة يسهل التعويض فيها

$s + 2 = 12$

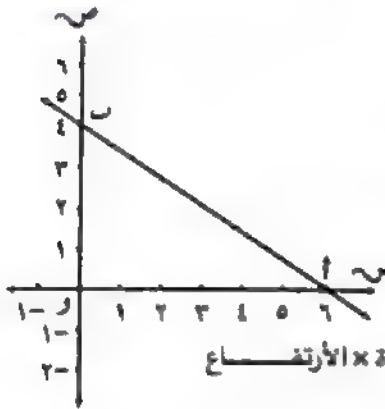
عندما $s = 0$: $0 + 2 = 12$: $t = 10$

عندما $s = 12$: $12 + 2 = 12$: $t = 0$: $s = 12 - 2t$ أو $s = 12 - 2 \times 10 = -8$ (يفضل التعويض عن s بعد نوجد)

عندما $s = 0$: $0 = 12 - 2t$: $t = 6$: يحقق العلاقة (6, 0)

عندما $s = 2$: $2 = 12 - 2t$: $t = 5$: يحقق العلاقة (5, 2)

عندما $s = 4$: $4 = 12 - 2t$: $t = 4$: يحقق العلاقة (4, 4)



ثم نمثل هذه الأزواج المرتبة

ونصل بينها بخط مستقيم

فيكون هو الخط المستقيم الممثل للعلاقة

ونلاحظ أن المثلث AOB

قائم الزاوية في O

مساحة $\triangle = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

مساحة $\triangle = \frac{1}{2} \times 6 \times 12 = 36$ وحدة مربعة



مثال ٦ إذا كان (٢، ١) يحقق العلاقة $٣س + ص = ٧$ فأوجد قيمة ١

الحل

∴ (٢، ١) يحقق العلاقة ∴ نعوض عن $س = ٢$ ، $ص = ١$ في العلاقة

$$٧ = ١ + ٢ \times ٣$$

$$٧ = ١ + ٢ \times ٣$$

$$١ = ١$$

$$٦ - ٧ = ١$$



أمثلة للتدريب

تدريب (١)

مثل بيانياً العلاقة $ص = س + ١$

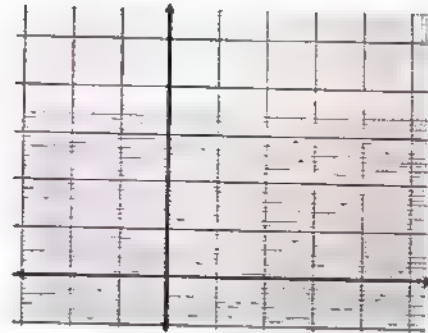
الحل

عندما $س = ٠$ ∴ $ص = ١$

عندما $س = ١$ ∴ $ص = ٢$

عندما $س = ٢$ ∴ $ص = ٣$

س			
ص			



تدريب (٢)

مثل بيانياً العلاقة $ص = س + ٣$

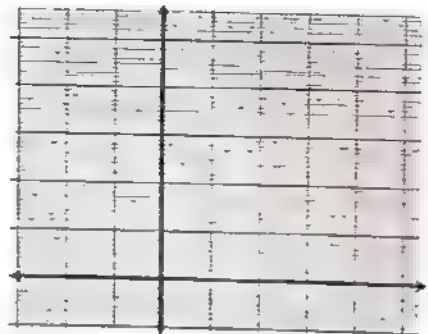
الحل

عندما $س = ٠$ ∴ $ص = ٣$

عندما $س = ١$ ∴ $ص = ٤$

عندما $س = ٢$ ∴ $ص = ٥$

س			
ص			



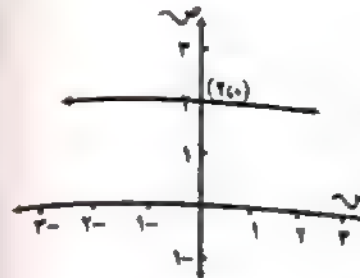
مثال ٤ مثل بيانياً كلا من العلاقات الآتية:

$$٢س = ٥$$

$$١س - ٢ = ٠$$

الحل

$$١س - ٢ = ٠ \quad \therefore ١س = ٢$$



العلاقة يمثلها خط مستقيم يوازي محور السينات ويبعد عنه مسافة ٢ وحدة فوق محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٢, ٠)

نلاحظ: العلاقة $١س = ٢$ يمثلها محور السينات نفسه



$$٢س = ٥ \quad \therefore ١س = \frac{٥}{٢} \quad \therefore ١س = ٢,٥$$

العلاقة يمثلها خط مستقيم يوازي محور الصادات ويبعد عنه ٢,٥ وحدة جهة اليمين ويقطع محور السينات في النقطة (٠, ٢,٥)

نلاحظ: العلاقة $١س = ٢$ يمثلها محور الصادات نفسه

٥ بين أي من الأزواج المرتبة الآتية يحقق العلاقة $س + ص = ٤$:

- ① (١, ٣) ② (١, -٣) ③ (-١, ٣) ④ (-١, -٣)

الحل

① بالتعويض عن $س = ١$ ، $ص = ٣$ في الطرف الأيمن للعلاقة

∴ الطرف الأيمن $٤ = ١ + ٣$ وحيث أنه \neq الطرف الأيسر

∴ (١, ٣) لا يحقق العلاقة

ونكرر العمل السابق مع كل زوج مرتب فنجد أن:

$$② \quad ٤ = (١) + (-٣) \quad \therefore (١, -٣) \text{ يحقق العلاقة}$$

$$③ \quad ٢ = ٣ + (-١) \quad \therefore (٣, -١) \text{ لا يحقق العلاقة}$$

$$④ \quad ٢ = (-٣) + ١ \quad \therefore (-٣, ١) \text{ لا يحقق العلاقة}$$

(١) أكمل ما يأتي:

- ١) إذا كان $f = 1$ ، $g = 2$ ، $h = 3$ فإن $[g, h] = 1$ $h = 1$ $g = 1$ $f = 1$
- ٢) $\sqrt{5} - \sqrt{18} - \sqrt{8} = \dots\dots\dots$
- ٣) إذا كان $s > 13$ ، $s + 1$ ، $s \geq 3$ فإن $s = \dots\dots\dots$
- ٤) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = \dots\dots\dots$

١ درجات

(ب) عين النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{5}$ على خط الأعداد

٢ درجات

(ج) اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٣٠ سم وحجمها ١٥٤٠ سم^٣ أوجد مساحتها الكلية

٣ درجات

ثانياً: اجب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

٢) أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق كلاً من العلاقات الآتية ومثلها بيانياً:

- ١) $s + s = 3$ ٢) $s - s = 4$
- ٣) $s - s = 5$ ٤) $s + s = 3$
- ٥) $s - s = 6$ ٦) $s + s = 4$
- ٧) $s - s = 2$ ٨) $s + s = 4$

٣) أكمل كل ما يأتي:

- ١) إذا كان $(1, 2)$ يحقق العلاقة $s - s = 4$ صفّر فإن $f = \dots\dots\dots$
- ٢) إذا كان الزوج المرتب $(3, 1)$ يحقق العلاقة $s + 2 = s$ فإن $h = \dots\dots\dots$
- ٣) إذا كان $(1, 1)$ يحقق العلاقة $s + 2 = s$ فإن $g = \dots\dots\dots$
- ٤) إذا كان الزوج المرتب $(0, 2)$ يحقق العلاقة $s + 2 = s$ فإن $h = \dots\dots\dots$
- ٥) أحد الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة $s + s = 5$ هو $(2, \dots\dots\dots)$
- ٦) الزوجان المرتبان $(0, \dots\dots\dots)$ ، $(\dots\dots\dots, 0)$ يحققان العلاقة $s - s = 4$ فإن $s = 12$
- ٧) العلاقة $s + 3 = s$ فإن $h = \dots\dots\dots$ يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بنقطة الأصل $(0, 0)$ عندما $h = \dots\dots\dots$

- ٨) الأزواج المرتبة $(1, \dots\dots\dots)$ ، $(\dots\dots\dots, 1)$ تحقق العلاقة $s - s = 3$ فإن $s = 5$
- ٩) العلاقة $s + 2 = s$ فإن $h = \dots\dots\dots$ لها عدد من الأزواج المرتبة التي تحققها
- ١٠) الشكل البياني الذي يمثل العلاقة $s = 3$ هو خط مستقيم يوازي محور ويبعد عنه بمقدار وحدة طول
- ١١) الخط المستقيم الممثل للعلاقة $s - 2 = s$ يوازي محور ويبعد عنه
- ١٢) التمثيل البياني للعلاقة التي على الصورة $f = s$ هو خط مستقيم يوازي محور

محور



١٠) أحد الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة $س + \frac{1}{4} = ٧$ هو

[(٢،٣) د (٤،٢) د (٤،٣) د (٦،٤)]

١١) إذا كانت النقطة (٣،٢) تنتمي للمستقيم الممثل للعلاقة $س - ٢ = ٥$ ،

فإن $هـ =$ [٨ د ٨- د ٤- د ٤]

١٢) المستقيم الممثل للعلاقة: $س + ٢ = ٣$

[يوازي محور السينات د يوازي محور الصادات د يقطع المحورين د غير ذلك]

١٣) العلاقة $س + ٣ = ٨$ يمثلها مستقيم يقطع محور الصادات في

النقطة [(٨،٠) د (٠،٨) د (٣،٠) د (٠،٣)]

١٤) (٢،٣) لا تحقق العلاقة

[$س + ٥ = ٣$ د $س - ٣ = ٢$ د $س + ٧ = ١$ د $س - ١ = ٩$]

س	١	٢	٣	٤	٥
هـ	١	٣	٥	٧	٩

١٥) الجدول الآتي يبين علاقة

س، هـ وهي

[$س + ٤ = ١$ د $س = ١ + ٣$ د $س - ١ = ٢$ د $س - ٣ = ٢$]



مسائل المستوى الثاني

٥) باستخدام العلاقة الخطية أكمل الجدول فيما يأتي :

٢) $س - ٥ =$

س	١		٥
هـ		٣	

١) $س + ٢ = ١$

س	٢	٠	١-
هـ			



١٣) العلاقة $س + ٢ = ٥$ تمثل بيانياً بخط مستقيم يمر بالنقطة (.....،.....)

١٤) إذا كان (ك، ٢) يحقق العلاقة $س + ١٥ = ك$ فإن ك =

١٥) المستقيم الممثل للعلاقة $س = ٣$ يقطع محور السينات في النقطة

٤) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس واكتبها في كراسة أجابتك :

١) أي الأزواج المرتبة التالية يحقق العلاقة $س + ٢ = ٥$ ؟

[(٣،١-) د (٢،٢) د (١،٣) د (٣،١)]

٢) العلاقة $س + ٢ = ٥$ يمثلها مستقيماً يمر بالنقطة

[(٥،١) د (٠،٥) د (٣،٢) د (٢،٣)]

٣) إذا كانت النقطة (٠،١) تحقق العلاقة $س - ٢ = ٤$ فإن قيمة ؟ =

[١ د ٢ د ٢- د ٣-]

٤) العلاقة $س - ٥ = ٥$ تمثل بيانياً بـ

[مثلث د نقطة د خط مستقيم د منحنى]

٥) العلاقة $س + ٣ = ٢ - ٥$ يحققها الزوج المرتب

[(٠،٠) د (١،٥) د (١،٢) د (١،-٤)]

٦) العلاقة $س + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١ - ٥$ يحققها الزوج المرتب

[(٠،٠) د (٣،١) د (١،١-) د (١،١)]

٧) العلاقة $س - ٣ = ٥$ يحققها الزوج المرتب

[(٠،٤) د (٣،-٤) د (٣،-٤) د (٣،-٤)]

٨) عدد الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة $س + ٢ = ٥$ هو

[١ د ٢ د صفر د عدد لا نهائي]

٩) إذا كان (٠، ب) يحقق العلاقة $س = ٣ (س - ٤)$ فإن ب =

[صفر د ٣ د ٤ د ٥]



٦ مثل بيانياً كلاً من العلاقات الآتية:

١) $٦ = ٢ + ٤$

٢) $٥ = ٢ + ٣$

٢) $٠ = ٢ - ٢$

٣) $٥ = ٢ - ٣$

٣) $٩ = ٣ + ٣$

٤) $٣ = ٢ - ٣$

٤) $٣ = ٢ - ٣$

٥) $٠ = ٢ + ٣$

٧ مثل بيانياً كلاً من العلاقات الآتية:

١) $١٢ = ٣ + ٩$

٢) $٦ = ٣ + ٣$

٢) $٢ = \frac{٣}{٣} + ٣$

٣) $١ = ٣ + ٣$

٣) $٤ = \frac{٢}{٣} - ٣$

٤) $١ = \frac{١}{٣} - ٣$

٨ مثل بيانياً كلاً من العلاقات الآتية:

١) $١ = ٣$

٢) $٢ = ٣$

٣) $٠ = ٣ + ٣$

٤) $٠ = ٣ - ٣$

٤) $٧ = ٢$

٥) $٤ = ٢$

٩ إذا كان (٢، ٣) يحقق العلاقة $٣ + ٢ = ٥$ فأوجد قيمة ب

١٠ إذا كان (١، ٢) يحقق العلاقة $٢ - ٢ = ٠$ فأوجد قيمة أ

١١ مثل المستقيم الذي يمثل العلاقة $٢ + ٣ = ٦$ وإذا كان هذا المستقيم

يقطع محور السينات في النقطة أ ويقطع محور الصادات في النقطة ب

فأوجد مساحة المثلث أ ب حيث نقطة أ هي نقطة الأصل

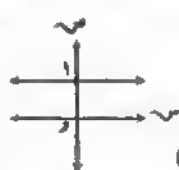
[٣ وحدات مربعة]



١٢ تأمل الأشكال الآتية وضم الإجابة الصحيحة داخل المربعات الخالية:



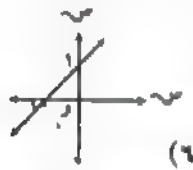
شكل (١)



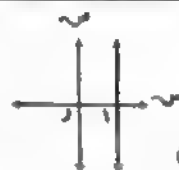
شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)



شكل (٥)



شكل (٦)

- | | | |
|---|---|---|
| <input type="checkbox"/> يمثلها شكل (١) | <input type="checkbox"/> يمثلها شكل (٢) | <input type="checkbox"/> يمثلها شكل (٣) |
| <input type="checkbox"/> يمثلها شكل (٤) | <input type="checkbox"/> يمثلها شكل (٥) | <input type="checkbox"/> يمثلها شكل (٦) |
| <input type="checkbox"/> يمثلها شكل (١) | <input type="checkbox"/> يمثلها شكل (٢) | <input type="checkbox"/> يمثلها شكل (٣) |



مسائل المتفوقين

١٣ مع عصام ١٠ أوراق مالية فئة ٥ جنيهاً و ٢٠ جنيهاً

اشترى عصام من المركز التجاري بمسا قيمته ٦٥ جنيهاً

عدد الأماكن المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام الأوراق المالية التي معه

وأوجد العلاقة بين عدد كل منها ومثل النقاط التي تحقق هذه العلاقة بيانياً

١٤ إذا كان ثمن طاولة الكمبيوتر ١٠٠ جنيهاً و ثمن الكرسي ٥٠ جنيهاً

فإذا باع المتجر في أحد الأسابيع بمبلغ ٥٠٠ جنيهاً ، فما هي التوقعات

المتمثلة لعدد الطاولات التي باعها وعدد الكراسي ؟ مثل هذه التوقعات بيانياً

١٥ أوجد قيمة أ ، ب اللتين تجعلان (٢ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ١) تحققان العلاقة $٤ = ٣ + ١$

١٦ إذا كان المستقيم الممثل للعلاقة $٢ = ٣ - ١$ يقطع محور السينات

في النقطة (١ ، ٣) فأوجد قيمتي أ ، ب

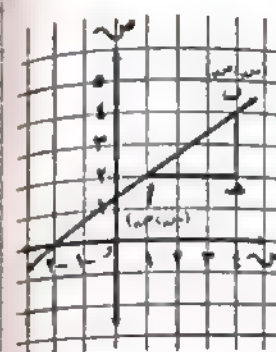
[٠، ٢]

[١٢٣]

[١٢٢]



ميل الخط المستقيم



إذا تحركت نقطة على خط مستقيم من موضع $(س_١, ص_١)$ إلى موضع آخر $(س_٢, ص_٢)$ حيث $س_٢ < س_١$ فإننا نلاحظ أنه حدث تغير في الإحداثيات ونجد أن: التغير في الإحداثي السيني $= س_٢ - س_١$ ويسمى بالتغير الأفقي التغير في الإحداثي الصادي $= ص_٢ - ص_١$ ويسمى بالتغير الرأسى (وهو يكون موجباً أو سالباً أو صفراً) وإذا قسمنا التغير الرأسى على التغير الأفقي فإننا نحصل على ما يسمى بميل الخط المستقيم

$$\text{أي أن ميل الخط المستقيم} = \frac{\text{التغير في الإحداثي الصادي}}{\text{التغير في الإحداثي السيني}} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقي}}$$

$$\therefore \text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{\text{فرق الصادين}}{\text{فرق السينين}} \text{ حيث } س_٢ < س_١$$

ملاحظات

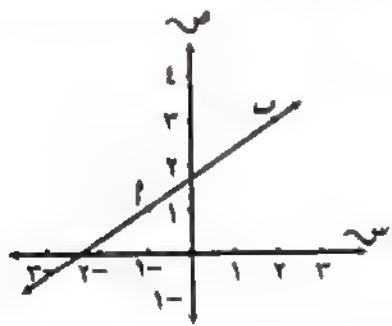
- إذا كان الميل = عدد موجب يكون شكل الخط المستقيم (يميل إلى اليمين)
- إذا كان الميل = عدد سالب يكون شكل الخط المستقيم (يميل إلى اليسار)
- إذا كان الميل = صفر يكون الخط المستقيم أفقى موازياً لمحور السينات
- إذا كان $س_٢ - س_١ = ٠$ يكون الخط المستقيم رأسى موازياً لمحور الصادات ونقول أن الميل غير معرف لأننا لا نستطيع حساب الميل إلا في حالة وجود تغير في الإحداثي السيني
- ميل الخط المستقيم ثابت لأي نقطتين عليه ويستخدم ذلك لإثبات أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة

أمثلة توضيحية

١ أوجد ميل \vec{AB} مع التوضيح على الرسم إذا كان:

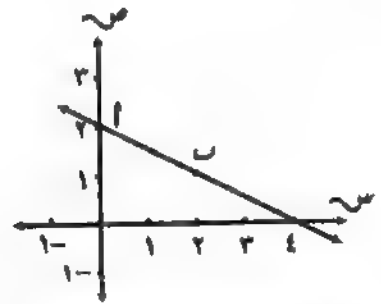
① $(١٤١, -١) = ب, (٢٤٠, ١) = أ$ ② $(٢٤٠, ١) = ب, (١٤٢, -١) = أ$

مع الحل



① ميل $\vec{AB} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-١ - ١}{١٤١ - ٢٤٠} = \frac{-٢}{-٩٩} = \frac{٢}{٩٩}$

لنلاحظ: المستقيم يصعد لأعلى كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين



② ميل $\vec{AB} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-١ - ١}{٢٤٠ - ١٤٢} = \frac{-٢}{٩٨} = -\frac{١}{٤٩}$

لنلاحظ: المستقيم يهبط لأسفل كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين

٢ أوجد ميل كل من:

- ① المستقيم المار بالنقطتين $(٢, ٣)$ و $(٤, ٤)$
- ② المستقيم المار بالنقطتين $(٣, ٤)$ و $(٤, ٥)$
- ③ المستقيم المار بالنقطتين $(٤, ٣)$ و $(٤, ٤)$
- ④ المستقيم المار بنقطة الأصل وبالنقطة $(٢, ٧)$
- ⑤ المستقيم الذي يقطع محور الصادات في النقطة $(٠, ٣)$ ومحور السينات في النقطة $(٢, ٠)$
- ⑥ المستقيم المار بالنقطتين $(٣, ٦)$ و $(٦, ١)$

نظم العمل

$$1 = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$$2 = \frac{3-1}{4-1} = \frac{2}{3} = \frac{3-1}{4-1} = \frac{2}{3}$$

$$3 = \frac{4-1}{5-1} = \frac{3}{4} = \frac{4-1}{5-1} = \frac{3}{4} \text{ (مستقيم أفقي)}$$

$$4 = \frac{5-1}{6-1} = \frac{4}{5} = \frac{5-1}{6-1} = \frac{4}{5}$$

$$5 = \frac{6-1}{7-1} = \frac{5}{6} = \frac{6-1}{7-1} = \frac{5}{6}$$

$$6 = \frac{7-1}{8-1} = \frac{6}{7} = \frac{7-1}{8-1} = \frac{6}{7} \text{ (مستقيم رأسي)}$$

أثبت أن النقاط أ، ب، ج، د تقع على استقامة واحدة

نظم العمل

لكي تكون النقاط أ، ب، ج، د على استقامة واحدة يجب أن يكون:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{3-1}{4-1} = \frac{2}{3} = \frac{4-1}{5-1} = \frac{3}{4} = \overrightarrow{BC}$$

∴ ميل \overrightarrow{AB} = ميل \overrightarrow{BC} وهما مشتركان في النقطة ب

∴ النقاط أ، ب، ج، د تقع على استقامة واحدة

نظم العمل

إذا كان الخط المستقيم الذي يحتوي على النقطتين (٣، ١) و (١، ٠) ميله $\frac{3}{2}$ فأوجد قيمة س

نظم العمل

$$2 = \frac{3-1}{4-1} = \frac{2}{3} \quad \therefore \frac{3-1}{4-1} = \frac{3}{2}$$

$$3 = 3 - 1 = 2 \quad 4 = 4 - 1 = 3$$

$$\therefore 3 = 3 \quad \therefore 2 = 2$$



تدريب (١)

أكمل لإيجاد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين في كل مما يأتي:

$$1 \text{ أ (٢، ١) ب (٣، ٤) ميل } \overrightarrow{AB} = \frac{4-1}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$$

$$2 \text{ ج (٣، ٢) د (٤، ١) ميل } \overrightarrow{CD} = \frac{1-2}{4-3} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$3 \text{ هـ (٤، ٣) و (٥، ٢) ميل } \overrightarrow{DE} = \frac{2-3}{5-4} = \frac{-1}{1} = -1$$

تدريب (٢)

أكمل ما يأتي لإثبات أن النقاط أ، ب، ج، د تقع على استقامة واحدة

على استقامة واحدة

$$\text{ميل المستقيم } \overrightarrow{AB} = \frac{3-1}{4-1} = \frac{2}{3} = \frac{4-1}{5-1} = \frac{3}{4} = \text{ميل المستقيم } \overrightarrow{BC}$$

$$\text{ميل المستقيم } \overrightarrow{CD} = \frac{5-3}{6-4} = \frac{2}{2} = 1 = \frac{6-5}{7-6} = 1 = \text{ميل المستقيم } \overrightarrow{DE}$$

∴ ميل \overrightarrow{AB} = ميل \overrightarrow{BC} وهما مشتركان في النقطة ب

∴ ميل \overrightarrow{CD} = ميل \overrightarrow{DE} وهما مشتركان في النقطة د



التمارين
تراكيب (٩)

ساعة امتحان ومراجعة



أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

١) أكمل ما يأتي :

- ١) مجموعة حل المعادلة $3 \geq x - 2$ هي $x \geq 5$ هي
- ٢) حجم الكرة التي طول نصف قطرها ٣ هو
- ٣) $[-4, 1] - [-4, 1] =$
- ٤) $81\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$ في أبسط صورة هي

٤ درجات

(ب) إذا كان $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} =$ ص
 فأوجد قيمة $x^2 + 2x + 3$

٣ درجات

(ج) كرة من المعدن طول نصف قطرها ١٦,٨ سم صهرت وصنع من مادتها المنصهرة ٤ مكرات متساوية الحجم أوجد طول نصف قطر كل كرة

٣ درجات

ثانياً: اجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

٢) أوجد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقط التالية :

- ١) $(1, 2)$ ، $(3, 1)$ ٢) $(1, 1)$ ، $(2, -3)$ ٣) $(4, 3)$ ، $(5, 0)$
- ٤) $(-3, 4)$ ، $(2, -5)$ ٥) $(1, 2)$ ، $(4, 1)$ ٦) $(1, 5)$ ، $(0, 5)$
- ٧) $(5, 2)$ ، $(3, 0)$ ٨) $(2, 3)$ ، $(0, 5)$ ٩) $(1, 6)$ ، $(3, 7)$

٣) أكمل كل مما يأتي :

- ١) ميل الخط المستقيم =
- ٢) إذا كانت $l = (1, 2)$ ، $b = (4, 3)$ فإن ميل \vec{ab} =
- ٣) إذا كان $l = (3, 1)$ ، $b = (1, 2)$ فإن ميل \vec{ab} =
- ٤) أي مستقيم يوازي محور السينات ميله =
- ٥) أي مستقيم يوازي محور الصادات ميله =
- ٦) إذا كانت a, b, c على استقامة واحدة فإن ميل \vec{ab} = ميل

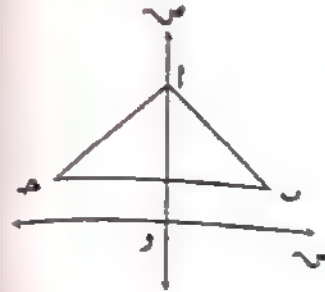
٤) أوجد ميل كل من :

- ١) المستقيم المار بالنقطتين $a(5, 2)$ ، $b(4, 3)$ [١]
- ٢) المستقيم المار بالنقطتين $h(8, 3)$ ، $s(2, 8)$ [١]
- ٣) المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة $(3, 1)$ $[\frac{1}{3}]$
- ٤) المستقيم الذي يقطع محور الصادات في النقطة $(0, 6)$ [٢]
- ويقطع محور السينات في النقطة $(-3, 0)$



مسائل المستوى الثاني

٥. فو الشكل المقابل :



ا ب هـ مثلث

أعط ما يأتي باستخدام أحد الكلمات (موجب أو سالب أو صفر أو غير معرف)

- ١ ميل \overrightarrow{AB} ٢ ميل \overrightarrow{BH}
٣ ميل \overrightarrow{AH} ٤ ميل \overrightarrow{AH}

٦. اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١. المستقيم المار بالنقطتين $(4, 5)$ ، $(3, 5)$
[أفقي ك رأس ك يمر بنقطة الأصل ك غير ذلك]

٢. إذا كانت النقطة $(2, 2)$ تقع على المستقيم الذي ميله $2 =$
فإن النقطة التي تقع على نفس المستقيم هي
[$(4, 4)$ ك $(4, 3)$ ك $(4, 4)$ ك]

٣. إذا كان ميل المستقيم الذي يحتوي النقطتين $(2, 1)$ ، $(3, 3)$ يساوي 2
فإن $3 =$ [3 ك 2 ك 1 ك 0 ك]

٤. مستقيم يمر بالنقطتين $(0, 3)$ ، $(1, 0)$ فإن ميله $=$
[$\frac{1}{3}$ ك 3 ك صفر ك $-\frac{1}{3}$]

٥. ميل أي خط مستقيم أفقي يكون
[عدد سب ك عدد موجب ك صفر ك غير معرف]

٦. إذا كان ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 1)$ ، $(3, 3)$ يساوي $\frac{1}{2} =$
فإن $3 =$ [3 ك 2 ك 1 ك 0 ك]



٧. في صلا مما يأتي أثبت أن النقط 1 ، 2 ، 3 هـ تقع على استقامة واحدة :

١. $1(-1, 2)$ ، $2(2, 1)$ ، $3(4, 3)$ هـ
٢. $1(1, 1)$ ، $2(3, 2)$ ، $3(5, 3)$ هـ
٣. $1(2, 2)$ ، $2(1, 3)$ ، $3(0, 4)$ هـ

٨. إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين $(1, 2)$ ، $(6, 5) = 5$ فأوجد قيمة 5 :

٩. أوجد قيمة k إذا كان :

١. ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2, 1)$ ، $(3, 3)$ يساوي 3 هـ
٢. ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3, 3)$ ، $(2, 2)$ يساوي 5 هـ
٣. $1 = (3, 1)$ ، $2 = (1, 3)$ ، $3 = (2, 2)$ هـ
٤. المستقيم يمر بالنقطتين $(2, 3)$ ، $(1, 1)$ هـ
٥. المستقيم يمر بالنقطتين $(3, 5)$ ، $(1, 3)$ هـ

١٠. أثبت أن ميل المستقيم المار بالنقطتين $(1, 2)$ ، $(1, 1)$ يساوي ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3, 3)$ ، $(2, 2)$ هـ

مسائل التفريق

١١. أوجد قيمة k بحيث يكون المستقيم الواصل بين النقطتين $(2, 3)$ ، $(1, 1)$ يوازي محور السينات

١٢. أعط ما يأتي : المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 1)$ ، $(1, 1)$ يكون عمودياً على محور السينات عندما $2 =$ هـ

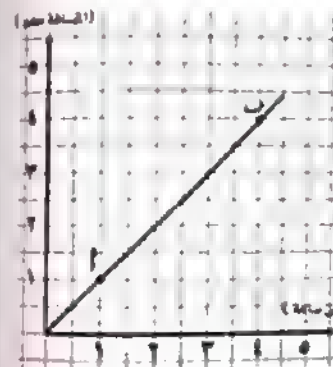
١٣. قام عامل دهان بالوقوف على سلم فكان ارتفاع الجزء الرأس $1,5$ متر وبعد قاعدة السلم عن الحائط 2 متر انزلق السلم فصار ارتفاع الجزء الرأس $0,9$ متر وصار بعد قاعدة السلم عن الحائط $2,4$ متر

١. أوجد ميل السلم في الحالتين
٢. أو الوضعين أفضل ب النسبة للعمال ؟

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم

سوف ندرس بعض التطبيقات الحياتية كتطبيق على العلاقة بين متغيرين مثل العلاقة بين أطوال الأشخاص وأعمارهم، والعلاقة بين كمية الوقود والمسافة التي تقطعها سيارة أو دراسة حركة سيارة ومعرفة العلاقة بين المسافة التي تقطعها والزمن اللازم لذلك وغيره

مثلاً:



إذا تحرك جسم من مكان ما وليكن نقطة أ ووصل إلى مكان آخر وليكن نقطة ب في خط مستقيم فإنه يمكن إيجاد العلاقة بين المسافة التي يمكن أن يقطعها وبين الزمن الذي يستغرقه لقطع هذه المسافة بإيجاد ميل هذا الخط المستقيم المار بالنقطتين أ، ب والذي يعبر عن تزايد المسافة خلال مدة معينة

$$\text{حيث الميل} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{\text{التغير في الإحداثي الصادي}}{\text{التغير في الإحداثي السيني}}$$

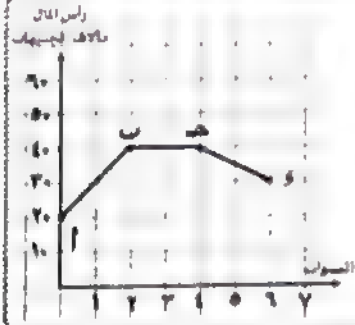
وإذا كان الجسم يقطع مسافات متساوية في أزمنة متساوية قيل أن الجسم يتحرك بسرعة منتظمة والذي يحددها هذا الميل أي أن السرعة المنتظمة "ع" = ميل الخط المستقيم الذي يمثل العلاقة بين المسافة والزمن بشرط أن تكون العلاقة تمثل جزء من خط مستقيم أما إذا كان عدة قطع مستقيمة ولا تمثل خط مستقيم واحد فإنه يمكن إيجاد

$$\text{السرعة المتوسطة للجسم حيث السرعة المتوسطة} = \frac{\text{المسافات الكلية}}{\text{الزمن الكلي الذي قطعت فيه المسافات}}$$

وفيما يلي سوف ندرس أمثلة على هذه التطبيقات:

أمثلة توضيحية

الشكل البياني المقابل:



يوضح تفسير رأس مال

شركة خلال 6 سنوات

① أوجد ميل كل من \vec{AB} ، \vec{BC} ، \vec{CD}

وما دلالة كل منها؟

② احسب رأس مال الشركة عند بدء عملها

والحل

$$1 = (20, 0) \text{ ، } 2 = (40, 2) \text{ ، } 3 = (40, 4) \text{ ، } 4 = (30, 6)$$

$$\textcircled{1} \text{ ميل } \vec{AB} = \frac{40 - 20}{2 - 0} = \frac{20}{2} = 10 \text{ وهو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة}$$

خلال السنتين الأولتين بمعدل 10 آلاف جنيه (أي 10 آلاف جنيه لكل سنة)

$$\text{ميل } \vec{BC} = \frac{40 - 40}{4 - 2} = \frac{0}{2} = 0 \text{ صفر وهو يعنى أن رأس مال الشركة كان ثابتاً}$$

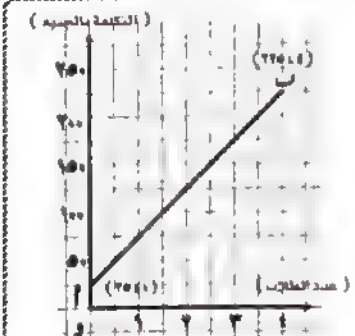
خلال السنتين الثالثة والرابعة

$$\text{ميل } \vec{CD} = \frac{30 - 40}{6 - 4} = \frac{-10}{2} = -5 \text{ وهو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة}$$

خلال السنتين الأخيرتين بمعدل 5 آلاف جنيه (أي 5 آلاف جنيه لكل سنة)

$$\textcircled{2} \text{ رأس مال الشركة عند بدء العمل} = \text{الإحداثي الصادي عند } 0 = 20 \text{ ألف جنيه}$$

الشكل البياني المقابل:



يمثل العلاقة بين تكلفة

رحلة مدرسية ما بالجنيه

وعدد الطلاب المشتركين أوجد:

① تكلفة الطالب

② المبلغ الثابت الذي تدفعه

المدرسة لحجز موعد



الحل

① خلال الثلاث ساعات الأولى (١٠، ٠) إلى (٣٠، ٤٠) = ب

$$\therefore ع = \frac{١٠ - ٧٠}{٠ - ٣} = \frac{٦٠}{٣} = ٢٠ \text{ كم / ساعة}$$

② خلال الثلاث ساعات التالية ع = $\frac{٧٠ - ٢٠}{٣ - ٦} = \frac{٥٠}{٣} = ١٦ \frac{٢}{٣}$ كم / ساعة

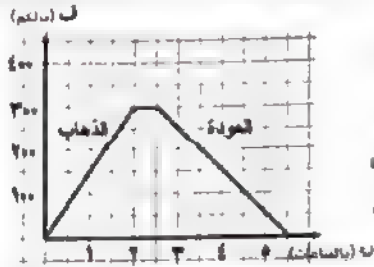
لاحظ أن السرعة السالبة تعني أن الدراجة تسير في الاتجاه المضاد لحركته
في الثلاث ساعات الأولى بسرعة $\frac{٥٠}{٣}$ كم / ساعة

③ من الرسم بعد الدراجة عن نقطة "و" عند بدء قياس الزمن = ١٠ كم

④ من الرسم بعد الدراجة عن نقطة "و" بعد ٦ ساعات من بدء قياس الزمن = ٢٠ كم



الشكل البياني المقابل :



يوضح العلاقة بين المسافة في
بالكيلومتر والزمن ت بالساعة
لقطار تحرك بسرعة منتظمة من
الوجه البحري إلى الوجه القبلي
ذهاباً وعودة

① ما مقدار السرعة المنتظمة في كل من المرحلتين ؟

② بماذا تفسر القطعة المستقيمة الأفقية في الشكل ؟

الحل

$$\textcircled{1} \text{ السرعة خلال الذهاب } = \frac{٣٠٠}{٣} = \frac{٣٠٠ - ٠}{٣ - ٠} = ١٠٠ \text{ كم / ساعة}$$

$$\text{السرعة خلال العودة} = \frac{٣٠٠ - ٠}{٦ - ٣} = \frac{٣٠٠}{٣} = ١٠٠ \text{ كم / ساعة}$$

و الإشارة السالبة تعني أن القطار يتحرك في الاتجاه المعاكس لحركته الأولى

أي أن السرعة = ١٠٠ كم / ساعة في الاتجاه المعاكس لحركته الأولى

② القطعة المستقيمة الأفقية تبين أن القطار توقف عن الحركة لمدة نصف ساعة

وقضى هذا الوقت في المحطة الأخيرة ثم تحرك عائداً إلى نقطة البداية



أمثلة للتدريب

تدريب (١)

الشكل البياني المقابل :



يوضح العلاقة بين المسافة في بالكم والزمن ت
بالساعة لدراجة تتحرك بسرعة منتظمة
أوجد سرعة الدراجة

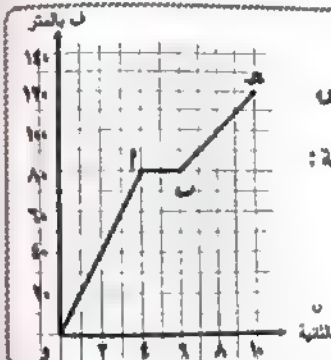
الحل

$$\therefore ع = \frac{٩٠ - ٠}{٨ - ٠} = \frac{٩٠}{٨}$$

$$\therefore ع = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots \text{ كم / ساعة}$$



الشكل البياني المقابل :



يمثل العلاقة بين المسافة د بالمترو والزمن ت

بالتوازي لطائرها المطلوب إيجاد السرعة :

① خلال الأربع ثوان الأولى

② خلال الثانيةيتين التاليتين

③ خلال الأربع ثوان الأخيرة

الحل

① السرعة خلال الأربع ثوان الأولى أي من نقطة و (٠، ٠) إلى (٤، ٨٠) = ب

$$\therefore ع = \frac{٨٠ - ٠}{٤ - ٠} = \frac{٨٠}{٤} = ٢٠ \text{ متر / ث}$$

② السرعة خلال الثانيةيتين التاليتين أي من نقطة ب (٤، ٨٠) إلى نقطة ج (٦، ٨٠) = ب

$$\therefore ع = \frac{٨٠ - ٨٠}{٦ - ٤} = \frac{\text{صفر}}{٢} = ٠ \text{ صفر أي أن الطائر يظل ساكناً خلال الثانيةيتين التاليتين}$$

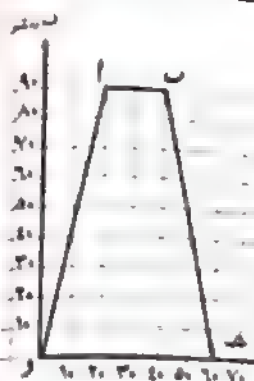
③ السرعة خلال الأربع ثوان الأخيرة أي من نقطة ب (٤، ٨٠) إلى هـ (١٠، ١٤٠) = ب

$$\therefore ع = \frac{١٤٠ - ٨٠}{١٠ - ٤} = \frac{٦٠}{٦} = ١٠ \text{ متر / ث}$$

تدريب (٢)

الشكل المبين المقابل:

يوضح حركة دراجة حيث
الزمن t بالثانية، المسافة s بالتر
فاصل ما يأتو:



① سرعة الدراجة خلال الـ ٢٠ ثانية الأولى

أي من نقطة $u = (0,0)$ إلى $u = (10,20)$

$$\therefore c = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{20 - 0}{10 - 0} = 2 \text{ متر/ثانية}$$

② سرعة الدراجة خلال الـ ٢٠ ثانية التالية أي من $u = (10,20)$ إلى $u = (40,20)$

$$\therefore c = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{20 - 20}{40 - 10} = 0 \text{ م/ث}$$

وهذا يعني أن

③ سرعة الدراجة خلال الـ ٢٠ ثانية الأخيرة أي من $u = (40,20)$ إلى $u = (70,0)$

$$\therefore c = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{0 - 20}{70 - 40} = -\frac{2}{3} \text{ م/ث}$$

وهذا يعني أن

اطلب الماهر في الرياضيات

للمرحلة الابتدائية وجميع المراحل

يحتوي على شرح كامل بالتفصيل يساعد ولي الأمر على الفهم
ويساعد المعلم على الشرح ويساعد الطالب على التدريب



تمارين (١٢) على تطبيقات حياتية على الخط المستقيم

أولاً: راجع معنا واختر نفسك

١) أكمل ما يأتو:

① $\{5, 2\} - \{5, 2\} = \{5, 2\}$

② مجموعة حل المتباينة $2 \leq x \leq 1$ هي \emptyset

③ $48\sqrt{7} - 2(\sqrt{7} - 3\sqrt{7}) + 6\sqrt{7} = 48\sqrt{7}$ في أبسط صورة

④ إذا كان $(2, k)$ يحقق العلاقة $s = 2 + t$ فإن $k = 2$

(ب) إذا كانت $s = 2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}$ ، $s = 2\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$

فأوجد في أبسط صورة قيمة المقدار $\frac{s + 1}{s - 1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أصل الورقة

التمرين (١٢)

التمرين (١٢)

التمرين (١٢)

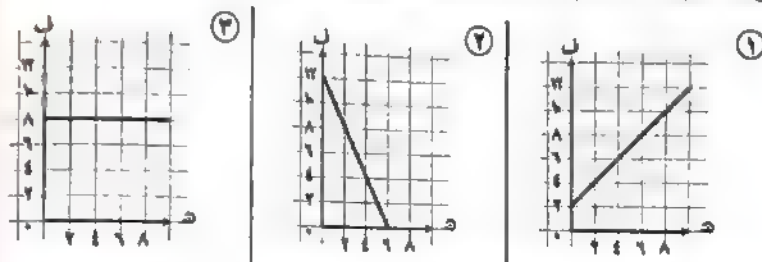
التمرين (١٢)



ثانياً : أجب عما يأتي :

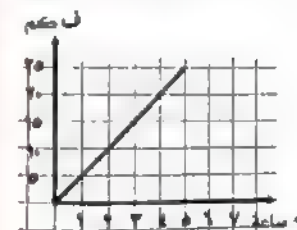
مسائل المستوى الأول

٢ كل من الأشكال التالية يوضح العلاقة بين المسافة f (بالمتر) والزمن h (بالثانية) لجسم ما، حدد موضع الجسم عند بدأ الحركة وعند $h = 6$ ثواني وأوجد ميل المستقيم في شكل حالة ماذا يمثل الميل ؟



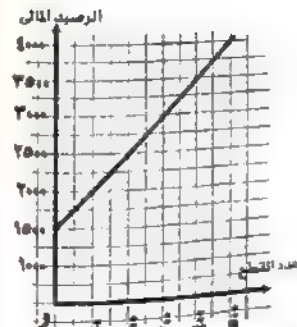
٣ الشكل البياني المقابل :

يمثل حركة دراجة تسير بسرعة منتظمة أوجد سرعة الدراجة



٤ الشكل البياني المقابل :

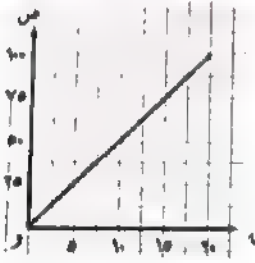
يوضح العلاقة بين عدد القطع المباعة من سلعة ما وقيمة الرصيد المالي للتاجر



- أوجد الرصيد المالي للتاجر قبل البيع ؟
- ما رصيد التاجر بعد بيع ٢٠٠ قطعة ؟
- ما عدد القطع المباعة إذا بلغ رصيد التاجر ٤٠٠٠ جنيه ؟

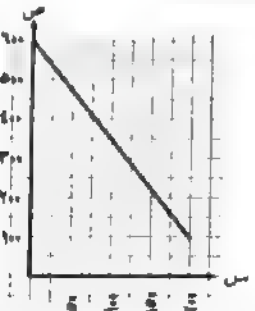


٥ موتور لرفع المياه يقوم برفع المياه لخزان عمارة علوى حجمه ١٠٠ لتر مكعب بمعدل ثابت والشكل البياني المقابل يمثل العلاقة بين حجم المياه بالخزان (ص) بالتر والزمن اللازم لملئه (ن) بالثانية ، أوجد :
١ معدل الزيادة في حجم الماء كل دقيقة
٢ حجم المياه بالخزان بعد ١٠ دقائق
٣ متى يمتلئ الخزان بالماء ؟



٦ الشكل البياني المقابل :

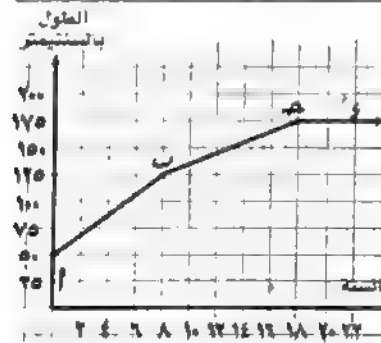
يمثل العلاقة بين المسافة التي تقطعها طائرة في أحد رحلاتها (س) بالكيلومتر وحجم الوقود المتبقى في خزاناتها بالتر (ص) أوجد :
١ أكبر سعة لخزانات الوقود
٢ حجم الوقود المتبقى في نهاية الرحلة
٣ متوسط استهلاك الوقود لكل كيلو متر



مسائل المستوى الثاني

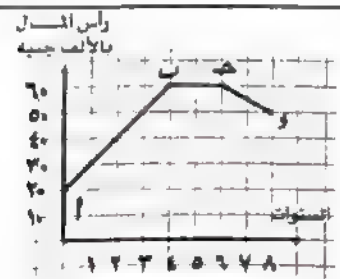
٧ الشكل البياني المقابل :

يوضح العلاقة بين طول شخص بالسنتيمترات وعمره بالسنوات
١ أوجد ميل كل من \vec{A} ، \vec{B} ، \vec{C} ، \vec{D} وما دلالة كل منها ؟
٢ احسب الفرق بين طول هذا الشخص عندما كان عمره ٢٢ سنة وطوله عندما كان عمره ٨ سنوات



٨ الشكل البياني المقابل :

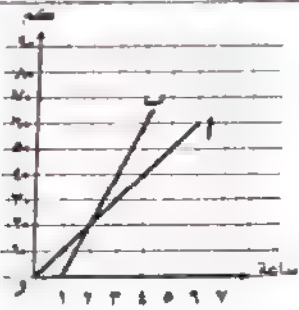
يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٨ سنوات
١ أوجد ميل كل من \vec{A} ، \vec{B} ، \vec{C} ، \vec{D} وما دلالة كل منها ؟
٢ احسب رأس مال الشركة عند بدأ عملها ؟





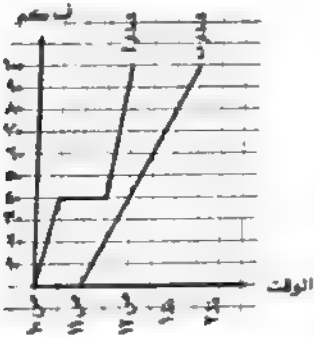
تطبيقات حياتية حل خط العظم

الشكل البياني المقابل :



- يمثل العلاقة بين المسافة بالكيلومترات والزمن بالساعات لحركة سيارتين أ، ب
- أوجد سرعة كل من السيارتين
 - كم تكون المسافة بين السيارتين بعد مرور 4 ساعات من بدء حركة السيارة أ ؟

الشكل البياني المقابل :



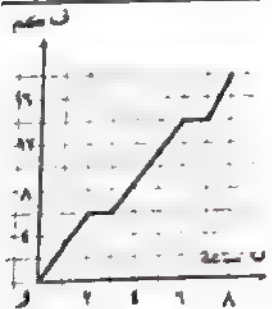
- يوضح العلاقة بين المسافة ف والزمن ه لحركة قطارين أ، ب بين محطتين حيث ف (بالكيلومتر) و ه (بالساعة) استلهم الرسم لإيجاد قيمة :
- البعد بين المحطتين
 - الزمن الذي استغرقه كل من القطارين
 - السرعة المتوسطة لكل منهما
 - ما دلالة القطعة المستقيمة في حركة القطار أ ؟



مسائل التفوقين

- تحركت دراجة بخارية فوجد أنها بعد دقيقة واحدة أصبحت على بعد 2 كم من نقطة معينة أ وبعد 3 دقائق أصبحت على بعد 5 كم من نفس النقطة اوسعهم شكلاً بيانياً يمثل هذه الحركة ومن الرسم أوجد :
- سرعة الدراجة
 - بعد نقطة البداية للدراجة عن نقطة أ

الشكل البياني المقابل :



- يوضح خط سير شخص ما خلال رحلة
- ما الفترة التي تحرك فيها الشخص بأقصى سرعة ؟
 - ما السرعة المتوسطة لحركة الشخص خلال الرحلة ؟
 - ما متوسط السرعات خلال الرحلة ؟

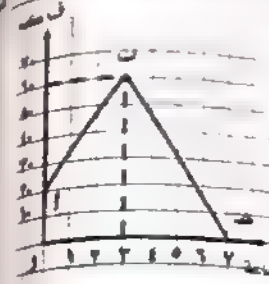
الملاحظ في الرياضيات



الشكل البياني المقابل :

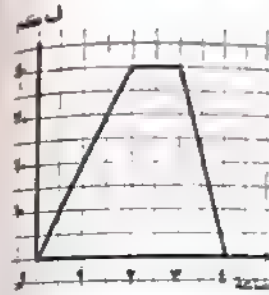
- يمثل حركة دراجة مقيسة من نقطة ثابتة أ أوجد :

- السرعة المنتظمة للدراجة خلال الساعات الثلاثة الأولى
- السرعة المنتظمة للدراجة خلال الساعات الأربعة التالية
- المسافة الكلية التي تحركتها الدراجة



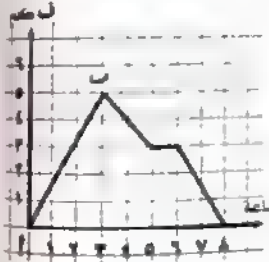
الشكل البياني المقابل :

- يمثل حركة راكب دراجة يحمل بضاعة ليسلمها إلى متجر ما وكان يسير بسرعة منتظمة أوجد :
- سرعته خلال الساعتين الأولتين
 - سرعته خلال الساعة الأخيرة
 - بماذا تفسر القطعة المستقيمة الأفقية في الشكل



الشكل البياني المقابل :

- يوضح العلاقة بين المسافة بالكيلومتر والزمن بالساعة لدراجة بخارية تحركت بين مدينتين أ، ب ذهاباً وعودة اجب عما يأتي :
- ما مقدار السرعة المنتظمة للدراجة أثناء رحلة الذهاب ؟
 - ما مقدار السرعة المتوسطة أثناء العودة ؟
 - ما دلالة القطعة المستقيمة الأفقية في الشكل ؟



ملا حازم خزان سيارته بالوقود وسعة هذا الخزان 40 لتراً وبعد أن تحرك 120 كم وجد أن المؤشر يوضح أن المتبقى $\frac{3}{4}$ الخزان اارسم الشكل البياني الذي يوضح العلاقة بين كمية الوقود بالخزان والمسافة التي قطعها السيارة (علماً بأن هذه العلاقة خطية) واحسب المسافة التي تقطعها السيارة حتى يفرغ الخزان

- وجد أن المؤشر يوضح أن المتبقى $\frac{3}{4}$ الخزان اارسم الشكل البياني الذي يوضح العلاقة بين كمية الوقود بالخزان والمسافة التي قطعها السيارة (علماً بأن هذه العلاقة خطية) واحسب المسافة التي تقطعها السيارة حتى يفرغ الخزان

(٤٨٠ كم)



جمع البيانات وتنظيمها

الوحدة الثالثة

- لدراسة ظاهرة أو مشكلة ما كى نصل لطرق علاجها يلزم تجميع بيانات حول هذه الظاهرة أو المشكلة محل الدراسة
- ونلاحظ عند جمع البيانات أنها تنقسم إلى قسمين:
 - (١) بيانات كمية: وهى التى تكون فى صورة أعداد مثل: عدد التلاميذ - عدد الكتب - عدد المدارس - السن - الوزن - الأجور
 - (٢) بيانات وصفية: وهى التى تكون فى صورة صفات مثل: الحالة الاجتماعية (أعزب - متزوج - أرمل - ...)، الجنس (ذكر - أنثى)، تقديرات (ممتاز - جيد - جيد جداً - مقبول - ...)، وسائل المواصلات (مترو - سيارة - دراجة - ...)

- ولجمع البيانات فإنه يمكن جمعها فى صورة:
 - بيانات ابتدائية: عن طريق استبيان أو كشوف الملاحظة
 - بيانات ثانوية: عن طريق مصادر مثل الإنترنت، الكتب، الوثائق، المنشورات الإحصائية
 - بيانات تجريبية: عن طريق التجارب واختبار صحة نظرية ما
- وتعرض البيانات التى نصل إليها يلزم تنظيمها وعرضها بطريقة تساعد على الاستفادة منها ويتم تنظيم وترتيب البيانات فى جداول تسهل استنتاج المعلومات ومن هذه الجداول "الجدول التكرارية"

- وقد درسنا الجداول التكرارية البسيطة العام السابق والتى تستخدم لعرض الأعداد الصغيرة والبسيطة، ولكن فى أحيان كثيرة تكون البيانات الإحصائية أعداد كبيرة مثل أجور الموظفين، ودرجات الطلاب فى الثانوية العامة وتنظيم هذه البيانات فى جداول تكرارية بسيطة يجعلها كبيرة جداً لذلك نلجأ إلى الجداول التكرارية ذى المجموعات
- وهى ما يلى سوف نوضح من خلال المثال كيفية تنظيم البيانات وعرضها فى جدول تكرارى ذى مجموعات:



أمثلة توضيحية

١ فيما يلى عدد أيام الغياب لمجموعة من الطلبة بأحد المدارس وعددهم ٤٠ طالب والمطلوب عمل الجدول التكرارى ذى المجموعات

١٤	٢٣	١٨	٢١	٢٦	١٧	٣٠	٦	٢١	١٠
١٧	٢٧	١٣	٢٢	٥	٢٨	١٥	١١	٢٠	٣٢
٢٤	٧	٢٢	١٦	٢٠	١٢	٢١	١٦	٢٥	١٥
١٩	٢٥	٢٦	١١	٢٥	٢٣	١٨	٢٢	٢٩	٢٤

الحل

لتكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات تتبع الخطوات التالية:

الغياب	العلامات	التكرار
٥	///	٣
١٠	/ ////	٦
١٥	//// ////	٩
٢٠	//// ////	١٢
٢٥	/// ////	٨
٣٠	//	٢
المجموع		٤٠

- نوجد أصغر قيمة وأكبر قيمة لهذه البيانات فنجد أن أصغر عدد لأيام الغياب هو ٥ وأكبر عدد هو ٣٢ أى أن قيم الجدول تبدأ من ٥ وتنتهى عند ٣٢ والفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة يسمى المدى أى أن $\text{المدى} = \text{أكبر قيمة} - \text{أصغر قيمة}$
 $\therefore \text{المدى} = 32 - 5 = 27$

- نجزئ المدى إلى عدد مناسب من المجموعات وليكن ٦ مجموعات منفصلة ومتساوية الطول

$$\therefore \text{مدى (طول) المجموعة} = \frac{27}{6} = 4,5 \approx 5$$

أى أن كل مجموعة تحتوى على ٥ أعداد فالمجموعة الأولى مثلاً تحتوى الأعداد ٥ (أصغر قيمة) ٦، ٧، ٨، ٩ ونكتب "٥ -" وتعنى مجموعة البيانات الأكبر من أو تساوى ٥ والأقل من ١٠، والمجموعة الثانية تحتوى العناصر ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤ ونكتب "١٠ -" وهكذا



٦) فيما يلي بيان لدرجات الحرارة المئوية في ٤٠ مدرسة في أحد أيام السنة

١٢	٢٨	١٦	٢٦	٣٠	٢٠	١٥	٢١	١٥	٢٧
٢٥	١٥	٣٠	٢٢	١٥	٢٧	١٥	٢٦	٢٢	٣٠
١٥	٣٠	٢٢	٢٢	٢٧	٢٨	٢٦	١٦	١٣	٢٦
١١	٢١	١٦	٢٨	٢١	٣٠	٢١	٢١	٢٥	٢٣

والمطلوب تكوين جدول لتكرار ذي المجموعات لهذه البيانات

٧) فيما يلي الأجر الأسبوعي بالعمالة لأربعين عاملاً في أحد المصانع

٤٧	٧١	٣٦	٩٤	٥٤	٦٤	٨٧	٨٩	٦٢	٥٧
٥١	٦١	٤٤	٥٢	٧٠	٦٦	٥٦	٣٢	٦٩	٣٦
٧٩	٤٨	٧٧	٩٠	٦٥	٩٩	٩٦	٦٧	٦٠	٥٥
٩٥	٧٥	٨١	٨٤	٧٨	٣٨	٤٩	٩٤	٤٨	٥٩

والمطلوب عمل جدول تكراري ذي مجموعات

(هذه المجموعات الجزئية ٣٠ - ٤٠٤ - ٥٠٤ - ٥٠٤ - ٩٠٤ - ٩٠٤)

وما المجموعة التي بها أكبر تكرار ؟ وما المجموعة التي بها أقل تكرار ؟



مسائل التفوقين

٨) فيما يلي أرباح السنة الأولى لعدد ٦٠ طالب ممن لديهم هواتف تليفون بالبريد

٥٠	٤٣	٥٥	٣١	٣٢	٤٨	٤١	٤٥	٥٦	٤٠
٦١	٤٣	٥١	٣٦	٤٠	٤٢	٣٠	٤٧	٤٥	٦٣
٢٢	٣٣	٥٣	٣٥	٣٧	٢١	٤٩	٥٩	٤٢	٥٦
٤٣	٥٣	٤٤	٥٣	٤٦	٣٣	٥٧	٣٥	٥٢	٤٥
٢٠	٤٧	٥٤	٦٥	٤٩	٣٧	٤٠	٤٢	٤٦	٤٤
٤٩	٣٢	٥٥	٤٦	٤٩	٥٨	٦٧	٣٤	٥٤	٣٩

والمطلوب تكوين جدول توزيع تكراري ذي المجموعات لهذه البيانات

٩) ثانياً : اجيب عما يأتي :



مسائل المستوى الأول

١) ثانياً فيما يلي بيان بالدرجات التي حصل عليها ٣٠ طالباً في أحد الاختبارات

٧	١٠	٧	٤	٥	٨	٦	٧	١٣	١٢
٢	٩	١١	١٢	١١	٩	١٥	١٢	١٣	٩
٥	١٤	١٤	٣	٩	١٤	٣	١٣	٨	١٧

مطلوب تكوين الجدول التكراري ذي المجموعات لهذه البيانات

٢) فيما يلي عدد الطلاب الذين يترددون على مكتبة المدرسة خلال ٣٠ يوم

٣٣	٣٨	٣٠	٣٦	٤٦	٣٥	٢٧	٢٧	٤٨	٢٤
٢٨	٣٨	٤٤	٤٢	٢٤	٤٢	٤٧	٤٧	٣٨	٣٢
٣٤	٤٣	٥٠	٣٥	٢٠	٢٤	٤٠	٥٠	٢٢	٣٩

والمطلوب تكوين الجدول التكراري ذي المجموعات لهذه البيانات

٣) فيما يلي بيان بالدرجات التي حصل عليها ٣٠ طالباً في أحد الاختبارات بمدرسة ما

٧	٨	٦	٧	١٣	٩	٨	٢	٧	٦
١٠	٥	٦	١٢	٠	٢	٧	٥	٣	٨
٧	٤	١٣	٤	١٢	٧	١١	١١	١٢	٩

والمطلوب تكوين جدول توزيع تكراري متخذاً المجموعات ٠ - ٣٤ - ٦٤ - ٩٤ - ١٠٤



مسائل المستوى الثاني

٤) فيما يلي بيانات الأجر الأسبوعي لعدد ٤٠ عاملاً في أحد المصانع

١٥	١٠	٢٤	٢٥	٢٢	١٦	٢١	٢١	٢٥	١٧
٢٢	٣٧	١٦	٣٦	١١	٢٤	١٧	٢٢	١٨	٢١
١٩	٣٢	٢٦	٢١	١٥	٢٧	٣٣	١٢	٢٧	٢٥
٢٣	٢٦	١٨	٢٨	٢٣	١٦	٢٤	٢٠	١٩	١٧

والمطلوب تكوين جدول توزيع تكراري ذي المجموعات لهذه البيانات



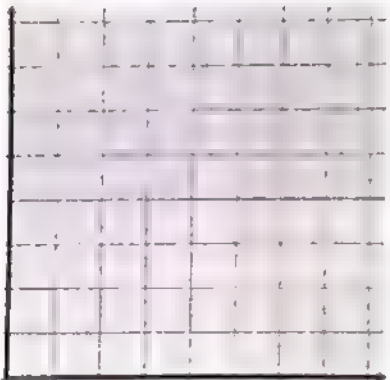
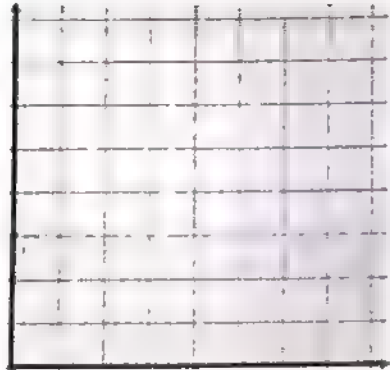
وكيفية العمل

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار للمجموعات الصاعدة
أقل من ١٠	صفر
أقل من ٢٠
أقل من ٣٠
أقل من ٤٠
أقل من ٥٠
أقل من ٦٠	٤٠

الجدول التكراري المتجمع النازل

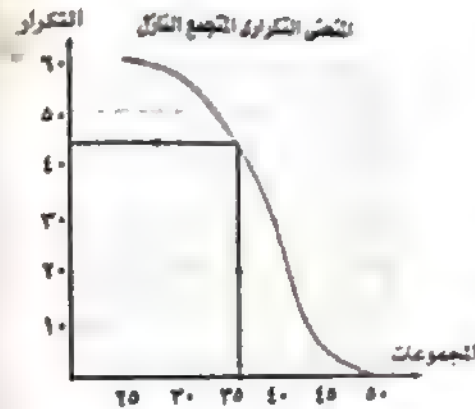
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار للمجموعات النازلة
١٠ فأكثر	٤٠
٢٠ فأكثر
٣٠ فأكثر
٤٠ فأكثر
٥٠ فأكثر
٦٠ فأكثر



وتكوين الجدول التكراري المتجمع النازل فإننا نكتب نفس الخطوات ولكن نكتب في الخانة الأولى للجدول الحدود السفلى للمجموعات ونكتب فيها المجموعات وبعدها "فأكثر" والخانة الثانية نكتب التكرار المتجمع النازل ومن ثم نرسم نجد أن عدد الأعمال التي سنعمل كل منهم ٣٦ سنة فأكثر = ٤٤ عاملاً ولاحظ أن التكرار المتجمع النازل يبدأ بمجموع التكرارات وينتهي بالصفر كما يلي:

الجدول التكراري المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار للمجموعات النازلة
٢٥ فأكثر	٦٠
٣٠ فأكثر	٥٧
٣٥ فأكثر	٤٧
٤٠ فأكثر	٢٨
٤٥ فأكثر	٥
٥٠ فأكثر	صفر



نقطة تقريب

تقريب (١)

كون الجدولين التكراريين لتجمعين الصاعد والنازل للتوزيع التكراري الآتي ثم ارسم المنحنى التكراري لكل منهما

المجموعات	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	المجموع
التكرار	٧	٩	١٢	٧	٥	٤٠



ثانياً : اكتب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

٢ كون الجدولين التكراريين المتجمعين الصاعد والنازل للتوزيعات التكرارية الآتية ثم ارسم المنحنى التكراري لكل منهما

المجموع	-٤٥	-٣٥	-٢٥	-١٥	-٥	المجموعات
التكرار	٥٠	٨	١١	١٥	٩	٧

المجموع	-١٢	-١٠	-٨	-٦	-٤	-٢	المجموعات
التكرار	١٠٠	٢٥	١٥	٢٠	٥	١٠	٢٥

المجموع	-٥٥	-٥٠	-٤٥	-٤٠	-٣٥	-٣٠	-٢٥	-٢٠	المجموعات
التكرار	١٠٠	٦	١٠	١٥	٢٥	٢٠	١٠	٨	٦

مسائل المستوى الثاني

٣ الجدول الآتي يبين أوزان ٥٠ طفلاً بالكيلوجرامات

مجموعات الأوزان	-٦٥	-٥٥	-٤٥	-٣٥	-٢٥	-١٥	عدد الأطفال
	٥٠	٥	١٠	١٥	١٠	٧	٣

- ١ كون الجدولين التكراريين المتجمعين الصاعد والهابط
- ٢ أوجد عدد الأطفال الذين يكون وزن كل منهم أقل من ١٥ كيلوجرام (سما)
- ٣ أوجد عدد الأطفال الذين يكون وزن كل منهم ١٥ كيلوجرام فأكثر [٥٠]
- ٤ أوجد عدد الأطفال الذين لا تقل أوزانهم عن ٣٥ كجم [١٠]

أسئلة الوزارة

تمارين (١٤) على الجدول التكراري المتجمع وتمثيله بيانياً

ساعة امتحان ومراجعة

أولاً : راجع معاً واختبر نفسك

١ (١) اكمل ما يأتي :

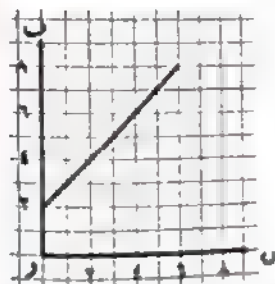
- ١ [١٤٠ [[٠, ٣ -] = ١
- ٢ مجموعة حل المتباينة $3 - 2 \geq 5 - 3$ هي 7 هو ٢
- ٣ إذا كانت $3 + 3\sqrt{2} = 5$ ، فإن قيمة $2 - 12\sqrt{2}$ هي ٣
- ٤ إذا كان حجم كرة π فإن طول نصف قطرها ٤

٤ درجات

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة $10\sqrt{2} = 10\sqrt{2} + 3$

٣ درجات

(ج) الشكل المقابل يوضح العلاقة



- ١ بين المسافة (س) التي يقطعها جسم بالمتري خلال زمن (ت) بالثانية
- ٢ حدد موضع الجسم
- ٣ عند بدأ الحركة (ت) بعد ثواني
- ٤ أوجد ميل المستقيم المحدد لمسار الجسم

٣ درجات



٤ فيما يلي التوزيع التكراري لدرجات ١٠٠ طالب في أحد الاختبارات

مجموع الدرجات	-٥	-٤	-٨	-١٢	-١٦	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠

ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد لهذا التوزيع ومن الرسم أوجد عدد الطلاب الذين تقل درجاتهم عن ١٠ درجات والذين تقل درجاتهم عن ١٤ درجة [٧٥، ٣٥]

٥ البيانات التالية لدرجات ١٠٠ طالب في امتحان تجريبي لمادة الرياضيات

المجموعات	-١	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	٨	١٤	١٥	٢٨	٢٣	١٢	١٠٠

والمطلوب:

- ١ تكوين كل من الجدول التكراري المتجمع الصاعد والنازل
- ٢ رسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والنازل على نفس ورقة الرسم البياني
- ٣ من الرسم أوجد عدد الطلاب الحاصلين على أقل من ٤٠ درجة والحاصلين على ٤٠ درجة فأكثر
- ٤ ما النسبة المئوية لنجاح الطلاب علماً بأن النهاية الصفري للنجاح ٢٠ درجة ؟
- ٥ ما النسبة المئوية للطلاب الحاصلين على أكثر من ٤٥ درجة ؟

٦ الجدول الآتي يمثل التوزيع التكراري لأعمار ٥٠ عامل بأحد المصانع

المجموعات	-٢٠	-٢٥	-٣٠	-٣٥	-٤٠	-٤٥	-٥٠	المجموع
التكرار	٥	٨	٩	١٣	٠٠٠	٥	٣	٥٠

والمطلوب:

- ١ اكمل الجدول
- ٢ رسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والمنحنى التكراري المتجمع النازل لهذا التوزيع
- ٣ من الرسم أوجد :
 ① عدد العمال الذين أعمارهم أكبر من ٣٢ سنة
 ② عدد العمال الذين أعمارهم أصغر من ٤٣ سنة



مسائل المتفوقين

٧ الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري لأجور ١٠٠ عامل بالجنيه في اليوم في أحد المصانع

مجموعات الأجور	-٥	-١٠	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠	-٣٥	المجموع
عدد العمال	٣	٨	١٢	١٨	٢٦	٢٣	١٠	١٠٠

ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والهابط واستلهم الرسم في إيجاد ما يلي :

- ١ كم عامل حصل على أقل من ١٢ جنيه
- ٢ كم عامل حصل على ٨ جنيهات فأكثر
- ٣ كم عامل حصل على أقل من ٢٠ جنيه
- ٤ كم عامل حصل على ١٢ جنيه فأكثر
- ٥ كم عامل حصل على أقل من ٢٤ جنيه
- ٦ كم عامل حصل على ١٦ جنيه فأكثر
- ٧ كم عامل حصل على أقل من ٢٦ جنيه
- ٨ كم عامل حصل على ٢٤ جنيه فأكثر



اطلب الماهر في الرياضيات
للمرحلة الابتدائية وجميع المراحل

يحتوي على شرح كامل بالتفصيل يساعد ولي الأمر على الفهم
ويساعد المعلم على الشرح ويساعد الطالب على التدريب

يسعدنا تلقي مقترحاتكم على موقعنا www.elmaher.org



أمثلة توضيحية

١ إذا كانت درجات ٥ طلاب في امتحان شهر يناير ل مادة الرياضيات هي ٧، ٤، ٦، ٣، ٩ فأوجد الوسط الحسابي لهذه الدرجات

الحل

$$\therefore \text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

$$\therefore \text{الوسط الحسابي} = \frac{7 + 4 + 6 + 3 + 9}{5} = \frac{29}{5} = ٥.٨ \text{ درجات}$$

٢ من الجدول التالي اوجد الوسط الحسابي

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	١٠	٢٠	٣٠	٢٥	١٥	١٠٠

الحل

نحدد مراكز المجموعات

$$\text{مركز المجموعة الأولى} = \frac{١٠ + ١٠}{٢} = ١٥, \text{ مركز المجموعة الثانية} = \frac{٢٠ + ٢٠}{٢} = ٢٥ \text{ وهكذا}$$

$$\text{ونعتبر نهاية المجموعة الأخيرة} = ٦٠ \text{ فيكون مركزها} = \frac{٦٠ + ٥٠}{٢} = ٥٥$$

ثم تكون الجدول الآتي ونحسب في الخانة الأخيرة مركز المجموعة \times التكرار

المجموعات	التكرار	مراكز المجموعات	ك \times م
-١٠	١٠	١٥	١٥٠ = ١٥ \times ١٠
-٢٠	٢٠	٢٥	٥٠٠ = ٢٥ \times ٢٠
-٣٠	٣٠	٣٥	١٠٥٠ = ٣٥ \times ٣٠
-٤٠	٢٥	٤٥	١١٢٥ = ٤٥ \times ٢٥
-٥٠	١٥	٥٥	٨٢٥ = ٥٥ \times ١٥
	١٠٠		٣٦٥٠

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{٣٦٥٠}{١٠٠} = ٣٦.٥$$

مقاييس التوزيع المركزية
الوسط الحسابي

بملاحظة الجدول التكراري نجد أن التكرارات تبدأ صغيرة ثم تتزايد حتى تصل إلى نهاية عظمى (أعلى الدرجات) ثم تتناقص وهذا يعني أن عدداً كبيراً من التكرارات يتركز عند قيمة متوسطة وهذا السلوك يسمى بالتوزيع المركزية فمثلاً : درجات الطلاب في الثانوية العامة نجدها تتركز معظمها ما بين ٧٠ % و ٩٠ % و تتركز أكثر عند قيمة معينة والتي تمثل مركز جذب لأغلب التكرارات وغير هذا تكون أعداد الطلاب فيها قليل بالمقارنة بمركز الجذب هذا وأي دراسة إحصائية لتوزيع تكراري يعتمد أساساً على دراسة هذا السلوك وقياسه ومن مقاييس التوزيع المركزية الوسط الحسابي والوسيط والمنوال والوسط الحسابي (المتوسط أو التوقع) :

هو أبسط المتوسطات جميعاً وأكثرها استخداماً وهو القيمة التي لو أعطيت لكل مفردة من مفردات المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس مجموع القيم الأصلية ويمكن حسابه بجمع قيم المفردات كلها ثم تقسم على عدد المفردات أي أن الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

لحساب الوسط الحسابي لتوزيع تكراري ذي مجموعات تتبع الآتي :

- ١ تكون جدول مكون من ٤ أعمدة ، العمود الأول نكتب به المجموعات
 - ٢ العمود الثاني ونكتب به التكرار
 - ٣ العمود الثالث ونكتب به مراكز المجموعات
- حيث مركز المجموعة = $\frac{\text{بداية المجموعة} + \text{نهاية المجموعة}}{٢}$

- ٤ العمود الرابع نكتب به حاصل ضرب تكرار كل مجموعة \times مركز المجموعة
- ٥ نحسب الوسط الحسابي حيث يساوي مجموع حواصل الضرب \div مجموع التكرارات

التمرين (١١)

احسب الوسط الحسابي للآلة الآتية بعد التوزيع التكراري لأحور الأسبوع من قبله جدول التوزيع

المتوسط	-٥٠	-٤٠	-٣٠	-٢٠	-١٠	٠
التكرار	١٠	٥	٢٠	٣٥	١٠	١٠

أوجد الوسط الحسابي للآلة الآتية

الجدول

المتوسط	التكرار	المتوسط	التكرار
-٥٠	١٠	٠	١٠
-٢٠	٣٥	١٠	١٠
-١٠	١٠	٢٠	١٠
-٥٠	١٠	٣٠	١٠
		٤٠	١٠
		٥٠	١٠

الوسط الحسابي =



موقع الماهر في الرياضيات www.elmaher.org

يحتوي على امتحانات إضافية من السنوات السابقة مع كثير من الموضوعات

التمرين (١٢)

أوجد الوسط الحسابي للآلة الآتية



أوجد الوسط الحسابي للآلة الآتية

أوجد الوسط الحسابي للآلة الآتية

$$[7, 4] - [7, 4] = 0$$

١٢) مجموعة حل المعادلة $1 - 2 < 2 - 3$ من $2 > 3$ من $2 > 3$ من

١٣) العلاقة من $0 = 0$ هيكلها مستقيم

$$1) \text{ إذا كانت } 2 - 3 = 2 - 3 \text{ من } 2 - 3 = 2 - 3 \text{ من } 2 - 3 = 2 - 3 \text{ من}$$

من $2 - 3 = 2 - 3$ من $2 - 3 = 2 - 3$ من $2 - 3 = 2 - 3$ من



ب) استمروا دائرة قائمة حجمها ١٥٠ سم^٣ وانصاعها ٢٠ سم أوجد مساحتها الكلية



ج) الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري لأحور الأسبوع من قبله جدول التوزيع

المتوسط	-٥٠	-٤٠	-٣٠	-٢٠	-١٠	٠
التكرار	١٠	٥	٢٠	٣٥	١٠	١٠

١) أوجد وسط العمال الذين نزل أحورهم من ٨٠ جنيه أسبوعياً

٢) أوجد المنحنى التكراري المتجمع الصاعد





الوسيط

الوسيط لمجموعة من القيم

هو القيمة التي تنوسيط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً بحيث يكون عدد القيم الأصغر منها مساوياً لعدد القيم الأكبر منها

مثلاً: إذا كان لدينا مجموعة من القيم عددها فردى مثل ١٥، ٩، ٦، ٤، ٢، ١١
فإن الوسيط هو القيمة التي تقع في الوسط تماماً بعد ترتيبها
فإذا رتبنا القيم تصاعدياً هي: ٢، ٤، ٦، ٩، ١١، ١٥
فإن الوسيط الذي ترتيبه $\left(\frac{10+1}{2}\right)$ حيث 10 عدد القيم الفردية هو ٩
أما إذا كان عدد القيم زوجي صممت مجموعة القيم ٨، ١٤، ١٦، ١٧، ٢١، ٣١
فإن الوسيط هو نصف مجموع القيمتين اللتين تقعان في الوسط بعد الترتيب
فإذا رتبنا القيم تصاعدياً هي: ٨، ١٤، ١٦، ١٧، ٢١، ٣١
فإن الوسيط الذي ترتيبه $\left(\frac{10}{2}, \frac{10}{2} + 1\right)$ حيث 10 عدد القيم الزوجية
$$\frac{16 + 17}{2} = 16.5$$

الوسيط لتوزيع تكراري ذي المجموعات بيانياً

لإيجاد الوسيط لتوزيع تكراري بيانياً تتبع الآتي:

- ١) يكون جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد (أو النازل)
- ٢) لرسم المنحنى المتجمع الصاعد (أو النازل) لهذا التوزيع
- ٣) نوجد ترتيب الوسيط حيث يساوي $\frac{N}{2}$ حيث N مجموع التكرارات
- ٤) نعين النقطة $\frac{N}{2}$ على المحور الرأسى (التكرارات) و نرسم منها مستقيماً أفقياً يقطع المنحنى في نقطة ثم نسقط من هذه النقطة عموداً يقطع المحور الأفقى في نقطة تكون هي الوسيط

جدول التوزيع التكراري

الجدول التكراري للتوزيع التكراري لعدد أيام الحوادث

العدد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
التكرار	١	٥	٧	٩	٨	٥	٣	٢	١	١

لأوجد قيمة

١) أوجد الوسيط الحسابي لهذا التوزيع

٢) أوجد عدد العمال الذين لا تقل أعمارهم عن ١٤

أعط ما يأتى:

- ١) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٨ والحد الأعلى لها ١٥ فإن مركزها
- ٢) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٤ ومركزها ٩ فإن حدها الأعلى
- ٣) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ١٦ ومركزها ١٢ فإن الحد الأدنى لها هو
- ٤) إذا كانت تمايز مجموعة هي ١٥ ومركزها هو ١٥ فإن طول المجموعة هو
- ٥) مركز المجموعة الأولى من المجموعات ٥ - ١١ - ١٧ - ٢٣ هو
- ٦) إذا كان الوسيط الحسابي لتوزيع تكراري هو ٢٩، ٨ ومجموع تكراراته ١١٠ فإن مجموع حواصل ضرب تكرار كل مجموعة في مركزها

مسائل التطبيق

١) الجدول الآتي يبين مجموعات الأجر الأسبوعي بالجنبة لعدد من العمال وحواصل ضرب مراعات المجموعات في التكرارات هي:

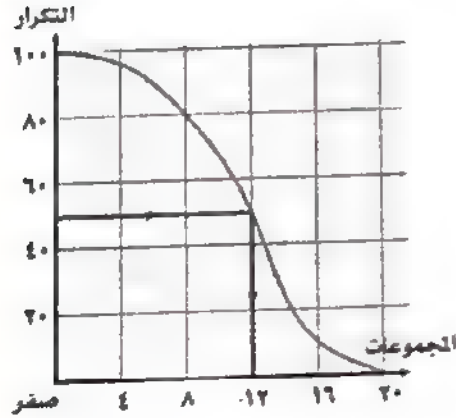
المجموعات	١٥٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠
$\sum x \cdot f$	١٥٠	٨٠٠	١٢٠٠	١٦٠٠	٢٠٠٠

أوجد الوسيط الحسابي للأجر الأسبوعي



ثالثاً : باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع النازل :
تكون الجدول التكرارى ونرسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل كما سبق
بنفس الطريقة نوجد الوسيط من المنحنى المتجمع النازل

المنحنى التكرارى المتجمع النازل



النهاية العليا للجموعات	التكرار المتجمع النازل
صفر فأكثر	١٠٠
٤ فأكثر	٩٥
٨ فأكثر	٨٠
١٢ فأكثر	٥٠
١٦ فأكثر	١٠
٢٠ فأكثر	صفر

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{100}{2} = 50$$

∴ الوسيط (من الرسم) = ١٢

٢ التوزيع التكرارى الآتى يبين الأجر اليومى لعند ١٠٠ عامل فى أحد المصانع

الأجر بالجنيه	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠	-٣٥	-٤٠	المجموع
عدد العمال	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨	١٠٠

- أرسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل لهذا التوزيع معاً
- أوجد الأجر الوسيط لكل منهما
- إذا كان كل ١٠ مم من المحور الأفقى يمثل ٥ جنيهات فأوجد ما يمثله ٢ مم



أمثلة توضيحية

١ أوجد الوسيط للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	صفر -	-٤	-٨	-١٢	-١٦	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠

الحل

أولاً : باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد :
الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

النهاية العليا للجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من صفر	صفر
أقل من ٤	٥
أقل من ٨	٢٠
أقل من ١٢	٥٠
أقل من ١٦	٩٠
أقل من ٢٠	١٠٠

١ تكون الجدول التكرارى

المتجمع الصاعد كما درسنا

٢ نرسم المنحنى التكرارى

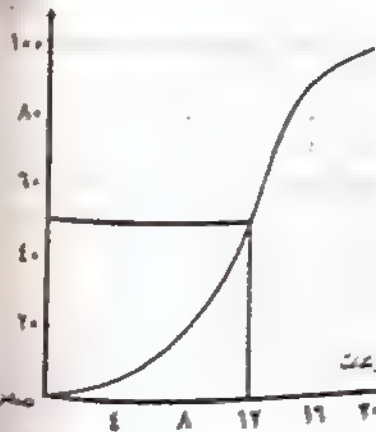
المتجمع الصاعد

٣ نوجد ترتيب الوسيط

$$\text{حيث ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$$

$$50 = \frac{100}{2}$$

التكرار



٤ تعيين النقطة ٥٠ على المحور الرأسى

(التكرار) ونرسم منها مستقيم أفقى

يقطع المنحنى فى نقطة

ثم نسقط من هذه النقطة عموداً

فيقطع المحور الأفقى (المجموعات)

فى نقطة نجد أنها ١٢

∴ الوسيط (من الرسم) = ١٢ المجموعات



أمثلة لتدريب

تدريب (١)

الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لأعمار ٥٠ طالب في أحد فصول المدرسة

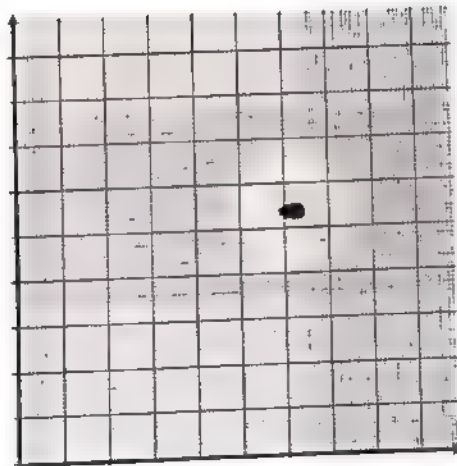
مجموعات العمر بالسن	-١٢	-١٣	-١٤	-١٥	-١٦	المجموع
عدد الطلاب	١٣	١٢	١٧	٧	١	٥٠

ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد لهذا التوزيع ومن الرسم أوجد العمر الوسيط لهذه المجموعة

حل الحل

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٢
أقل من ١٣
أقل من ١٤
أقل من ١٥
أقل من ١٦
أقل من ١٧



١٢ ١٣

∴ ترتيب الوسيط = $\frac{50+1}{2} = 25.5$

∴ الوسيط (من الرسم) =



حل الحل

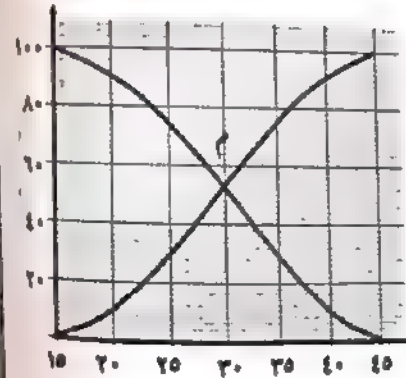
١

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٥	صفر
أقل من ٢٠	١٠
أقل من ٢٥	٢٥
أقل من ٣٠	٤٧
أقل من ٣٥	٧٢
أقل من ٤٠	٩٢
أقل من ٤٥	١٠٠

الجدول التكراري المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١٥ فأكثر	١٠٠
٢٠ فأكثر	٩٠
٢٥ فأكثر	٧٥
٣٠ فأكثر	٥٣
٣٥ فأكثر	٢٨
٤٠ فأكثر	٨
٤٥ فأكثر	صفر



٢) نرسم المنحنيين المتجمعين

الصاعد و النازل معاً في تقاطعها في نقطة واحدة نفرضها م من نقطة م نسقط عمود على المحور الأفقي فيقطع منه في نقطة هي الوسيط ∴ الأجر الوسيط = ٣١ جنيه

$$\textcircled{3} \quad ٥ = ١٠ \times \frac{١}{٢} \quad \therefore \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{م} = \frac{١}{٢} \text{ جنيه} \quad \therefore ٢ \text{ م} = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١ \text{ جنيه}$$



ساعة استراحة ومراجعة

أولاً: راجع معنا واختر نفسك

الترتيب
(١٦)



١) أكمل ما يأتي:

- ١) مجموعة حل المتباينة $3 \leq x \leq 4$ هي $[-3, 4]$
- ٢) المقدار $5\sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{12} - \sqrt{5}$ في أبسط صورة =
- ٣) العدد $\sqrt{7}$ ينحصر بين العددين النسبيين ٤ لأقرب رقمين عشريين
- ٤) حجم الكرة التي طول قطرها ٦ سم هو

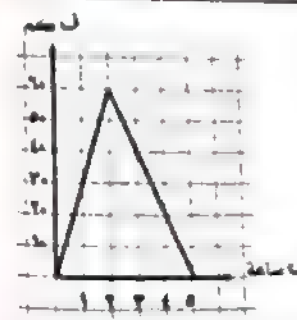
٤ درجات

(ب) إذا كانت $x = -3$ ، $y = 2$ ، $z = 1$ فأوجد مستعينا بخط الأعداد

$x - y + z$ ، $x + y - z$ ، $x - y - z$

٣ درجات

(هـ) الشكل المقابل



- يمثل حركة سيارة مقيمة
من نقطة ثابتة
أوجد السرعة المنتظمة للدراجة خلال
- ١) أول ساعة
 - ٢) الساعات الثلاث التالية

٣ درجات

ثانياً: اجب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

٢) أكمل ما يأتي:

- ١) الوسيط لمجموعة القيم ٨، ٥، ٦، ٢، ٣ هو
- ٢) الوسيط لمجموعة القيم ٣، ١٢، ٧، ١٩، ٦ هو
- ٣) الوسيط لمجموعة القيم ٢، ٧، ٤، ٩، ٥، ١٢ هو
- ٤) الوسيط لمجموعة القيم ٦، ١٧، ٨، ١٥، ١١ هو
- ٥) ترتيب الوسيط لمجموعة القيم ٦، ٢، ٥، ٨، ١ هو
- ٦) إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم
- ٧) إذا كان الوسيط لمجموعة القيم ١، ١، ٢، ١، ٤، ٥، ٤، ٣ هو ٧ فإن ١ =

٣) باستخدام المنحنى المتجمع المتساعد أوجد الوسيط للتوزيع التكراري فيما يأتي:

المجموعات	-٢	-٤	-٦	-٨	المجموع
التكرار	١	٢	٢	٥	١٠

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	المجموع
التكرار	٦	٨	٤	٢	٢٠

مسائل المستوى الثاني

٤) فيما يلي توزيع الأجور لبعض العاملين في أحد المصانع بالجنيه

مجموعات الأجور	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
عدد العمال	٧	٩	١٢	٧	٥	٤٠

أوجد الأجر الوسيط لهذه المجموعة

[٣]



الوسيط

٧ التوزيع التكراري الآتي يبين عدد أيام هباب ٦٠ طالب خلال العام الدراسي

المجموعات	-٥	-١٠	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠	المجموع
التكرار	٦	١١	١٥	١٠	٩	٥	٤

أوجد الوسيط مستخدماً المنحنى التكراري المتجمع الصاعد

[١٩]

٨ من الجدول التكراري التالي ذي المجموعات المتساوية في المدى

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	المجموع
التكرار	١٠	١٧	٢٠	٣٢	٤٠	٤	١٠٠

١ أوجد قيمة كل من س، ك

[١٠٠]

٢ ارسم في شكل واحد المنحنين المتجمعين الصاعد والنازل ثم احسب الوسيط



مسائل التفريق

٩ إذا كان الجدول التكراري المتجمع الصاعد لتوزيع تكراري ما تبدأ حدوده العليا للمجموعات بأقل من ٢٠ وحتى أقل من ٤٤ والتكرار المتجمع الصاعد كان على

الترتيب كما يلي: ١٠٠، ٨٨، ٦٨، ٣٨، ١٥، ٥، ٤، ٠

فأوجد جدول التوزيع التكراري ثم أوجد الوسيط

[٣]



المهرف في الرياضيات

للمرحلة الابتدائية والمرحلة الإعدادية والمرحلة الثانوية
شرح ومراجعة وأهم الأسئلة المتوقعة لامتحان
امتحانات إضافية من السنوات السابقة

المهرف في الرياضيات



٥ الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لدرجات ٥٠ طالباً في أحد الامتحانات

مجموعات الدرجات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
عدد الطلاب	٨	١٢	١٨	٧	٣	٢

[٣٣]

٦ الدرجة الوسيطة

١ أوجد الدرجة المتوسطة

٦ ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد أو النازل
وعين الوسيط بيانياً من التوزيعات التكرارية الآتية:

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	٧	٩	١٥	١١	٨	٥٠

[٢٠]

المجموعات	-٢	-٤	-٦	-٨	-١٠	-١٢	المجموع
التكرار	٢	٥	٨	١٩	١٤	٢	٥٠

[١٠]

المجموعات	-١٢	-١٣	-١٤	-١٥	-١٦	المجموع
التكرار	١٣	١٢	١٧	٧	١	٥٠

[١٤]

المجموعات	-١٠	-٤	-٨	-١٢	-١٦	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠

[٣]

المجموعات	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	-٥٥	-٦٥	المجموع
التكرار	٣	٧	١٠	١٥	١٠	٥	٥٠

[١١]

المَنوال

المَنوال

هو القيمة الأكثر شيوعاً في المجموعة أو القيمة التي تكرر أكثر من غيرها

مثلاً: المَنوال لمجموعة القيم ٢، ٥، ٦، ٥، ٤، ٧، ٥ هو ٥

و لإيجاد المَنوال تتبع الخطوات التالية:

- ١ نرسم المرح التكراري للتوزيع ثم نرسم مستقيم يصل بين الرأس الأيمن العلوي لأطول مستطيل وبين الرأس الأيمن العلوي للمستطيل السابق له ثم نرسم مستقيم يصل بين الرأس الأيسر العلوي لأطول مستطيل وبين الرأس الأيسر العلوي للمستطيل الذي يليه
- ٢ يتقاطع المستقيمان في نقطة، نسقط منها عموداً على المحور الأفقي يقطعه في نقطة فتكون هي المَنوال

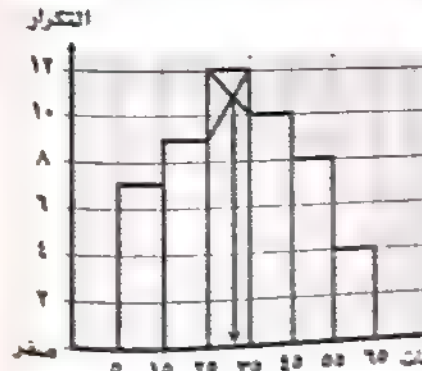
أمثلة توضيحية

١ الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لمرجات ٥٠ طالب في أحد الاختبارات

المرجات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	-٥٥
عدد التلاميذ	٧	٩	١٢	١٠	٨	٤

ارسم المدرج التكراري ثم أوجد المَنوال

الحل



نرسم المدرج التكراري كما بالشكل
بان نرسم مستطيلات تمثل كل فترة
فمثلاً المستطيل الأول بين النقطتين
التي تمثلان الفترة (من ٥ إلى ١٥)
و يصل لأعلى حتى النقطة التالية
لتكرار الفترة (٧ تكرار الفترة الأولى)

المَنوال

ثم نعين أطول مستطيل وهو الذي يمثل المجموعة الأكثر تكراراً
وتسمى " المجموعة المتواليه " ونصل رأسه العلوي الأيمن بالرأس العلوي الأيمن
للمستطيل السابق له ونصل رأسه العلوي الأيسر بالرأس العلوي الأيسر
للمستطيل الذي يليه كما بالشكل ونسقط من نقطة تقاطع المستقيمين
عموداً على المحور الأفقي فيقطعه في نقطة فتكون هي المَنوال
∴ المَنوال = ٣١ درجة

أمثلة لتدريب

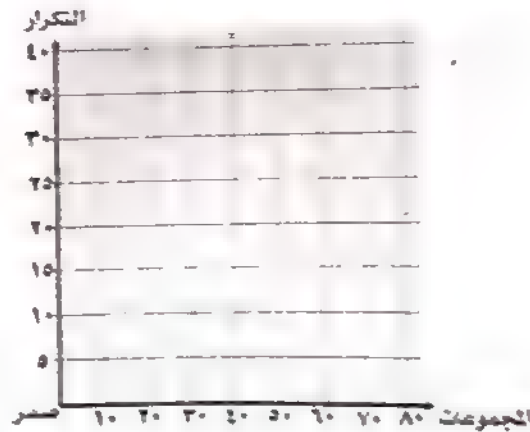
تدريب (١)

الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري للأجور الأسبوعي
لثلاثة عامل بالجنيه

مجموعات الأجر	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
عدد العمال	١٠	٢٠	٣٠	٢٥	١٥	١٠٠

ارسم المدرج التكراري لهذا التوزيع وأوجد الأجر المَنوال

الحل



من الرسم نجد أن المَنوال = جنيه



ثانياً : اجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

٢ اكمل ما يأتي :

- ١ المتوال لجموعه من القيم هو
- ٢ المتوال للقيم ١، ٣، ٥، ٧، ٩ هو
- ٣ المتوال للقيم ٧، ٣، ٥، ١، ٣ هو
- ٤ المتوال للقيم ٦، ١، ٢، ٤، ٣، ٥ هو
- ٥ إذا كان المتوال للقيم ٣، ٦، ٩، ١٢ هو ٦ فإن ك =
- ٦ إذا كان المتوال للقيم ١، ٣، ٥، ٧، ٩، ١١ هو ٣ فإن ك =
- ٧ إذا كان المتوال للقيم ٤، ٥، ٢، ١، ٠ هو ٤ فإن س =

٣ أوجد المتوال بيانياً للجداول التكرارية الآتية :

المجموع	-٥٠	-٤٠	-٣٠	-٢٠	-١٠	المجموعات
٤٠	٥	٧	١٢	٩	٧	التكرار

[٣٧]

المجموع	-٤٥	-٣٥	-٢٥	-١٥	-٥	المجموعات
١٠٠	١٠	٢٥	٤٠	٢٠	٥	التكرار

[٣٠]

المجموع	-١٦	-١٢	-٨	-٤	-٠	المجموعات
٤٠	٥	٨	١١	٩	٧	التكرار

[٩]

المجموع	-٢٥	-٢٠	-١٥	-١٠	-٥	المجموعات
٣٠	٥	٧	٨	٦	٤	التكرار

[٨]



اسئلة المتوالة

على المتوالة

تمارين (١٧)

١ ساعة امتحان ومراجعة



أولاً : راجع معنا واختر نفسك

اختيار تراكمي (١٥)

١ (١) اكمل ما يأتي :

- ١ $[-\infty, 3] \cup]3, \infty[=]3, \infty[$
- ٢ مجموعة حل المتباينة $\frac{1}{x} - 2 \geq 0$ هي $x > 2$
- ٣ إذا كانت مساحة الأوجه الستة لمكعب 54 cm^2 فإن حجمه =
- ٤ إذا كان $S = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$ ، فإن قيمة $(S + S^2)$ =

درجات

(ب) حل المعادلة $\sqrt{x} - 3 = 2$ في x ومثل الحل على خط الأعداد

درجات

(ج) أوجد المتوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :

المجموع	-٣٥	-٢٥	-١٥	-٥	المجموعات
٢٠	٢	٤	٨	٦	التكرار

درجات



٧ الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لـ ١٠٠ مجموعة متساوية المدى للأجور الأسبوعية تعدد ١٠٠ عامل بأحد المصانع

الأجر بالجنيه	-٧٠	-٨٠	-٩٠	-١٠٠	-١١٠	-١٢٠	-١٣٠
عدد العمال	١٠	١٣	٤ - ك	٢٠	١٦	١٤	١١

أوجد:

١ قيمة كل من س، ك

[١٠، ١١]

٢ الأجر المتوالي بالجنيه

[١٢، ١٣]



مسائل التفوقين

٨ الجدول الآتي يبين توزيع التكراري لأوزان ٥٠ تلميذاً بالكيلوجرام بإحدى المدارس

الوزن بالكيلوجرام	-٣٠	-٣٥	-٤٠	-٤٥	-٥٠	-٥٥
عدد التلاميذ	٤ + ك	٣ ك	٤ ك	٣ ك + ١	٣ ك - ١	١ + ك
المجموع	١٠٠					

١ أوجد قيمة ك

[٢]

٢ ارسم المدرج التكراري وأوجد الوزن المتوالي

٩ أوجد المتوال للجدول التكراري الآتي:

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠
التكرار	٥	٢٠	٣٠	٣٠	١٥
المجموع	١٠٠				

[٦]



مسائل المستوى الثاني

٤ أوجد المتوال بيانياً للجدول التكراري الآتي:

المجموعات	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠
التكرار	١٠	١٢	١٤	٩	٣	٢
المجموع	٥٠					

[١٤]

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	-٥٥
التكرار	٥	٦	٩	١٥	٨	٧
المجموع	٥٠					

[١٥]

المجموعات	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠
التكرار	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨
المجموع	١٠٠					

[١٥]

٥ الجدول الآتي يوضح درجات أحد الفصول في مادة الرياضيات

مجموعات الدرجات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠
عدد الطلاب	٣	٥	٦	٥	٢
المجموع	٢٥				

[٢٥]

ارسم المدرج التكراري وأوجد الدرجة المتوالي

٦ في التوزيع التكراري الآتي:

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠
المجموع	١٠٠				

أوجد:

١ الوسط الحسابي

[١١، ١٢]

٢ الوسط

[١٢]

٣ المتوال

[١٣]



نموذج (٢)

٣٠

اختبار مراجعة على ما سبق

١ اكمل ما يأتي :

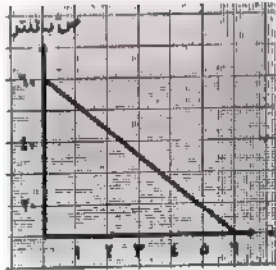
درجات

- ١ مجموعة حل المتباينة $-4 \leq x \leq 8$ هي x هي
- ٢ أسطوانة دائرية قائمة حجمها 500π وطول نصف قطر قاعدتها ٥ م يكون ارتفاعها
- ٣ $54\sqrt{3} + \frac{14}{\sqrt{3}} - 28\sqrt{3} - \sqrt{3} =$ في أبسط صورة =
- ٤ $[-3, 2] - [5, 1] =$

درجات

٢ (٢) إذا كان $\frac{4}{3\sqrt{3} - \sqrt{3}} =$ م ، $\sqrt{3} - \sqrt{3} =$ م

- ١ أثبت أن م ، م عدنان متوافقان
- ٢ أوجد م م م
- (ب) الشكل المقابل



- يمثل العلاقة بين الزمن س بالساعة وكمية الوقود م باللتر
- فإذا ملئ خزان سيارة بالبنزين أوجد :
- ١ أكبر سعة للخزان
- ٢ متى يشرع الخزان ؟
- ٣ معدل استهلاك السيارة للبنزين

درجات

٣ أكتب الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠



اختبارات (٢)

اختبارات مراجعة على ما سبق

نموذج (١)

٣٠

اختبار مراجعة على ما سبق

١ اكمل ما يأتي :

درجات

- ١ معكوب طول حرفه ٣ م فإن حجمه =
- ٢ إذا كان م $3\sqrt{3} + 2 =$ م ، $3\sqrt{3} - 2 =$ م فإن $\frac{3\sqrt{3} + 2}{3\sqrt{3} - 2} =$
- ٣ $[-2, 2] \cup [3, 4] =$
- ٤ مجموعة حل المتباينة $-3 > x > 1 + 5$ هي x هي

درجات

٢ (١) مثل بيانياً المستقيم الذي يمثل العلاقة م + ٢ = ٣

- (ب) إذا كان م $\frac{1}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}} =$ م هي المعكوس الضربي للعدد م
- أوجد م ثم اثبت أن (م + م) - ٢ = ١٠

درجات

٣ فيما يلي التوزيع التكراري للأجر الأسبوعي لعمال إحدى المزارع

الأجر بالجنيه	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	-٥٥	-٦٥	-٧٥
عدد العمال	١٠	١٢	٢٦	٣٠	١٧	١١	٤

أكتب الأجر الوسيط

نموذج (3)

اختبار مراجعة على ما سبق

٣٠

١٠
دقائق

١ اكتب الإجابة الصحيحة من بين القوسين:

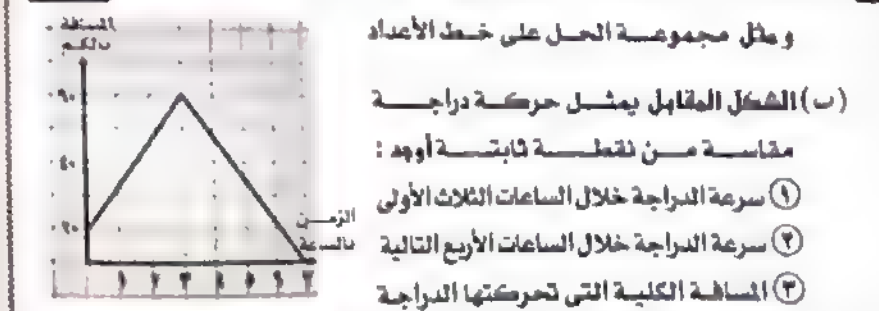
١ $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
[صفر د - $\sqrt{2}$ د $\sqrt{2}$ د $\sqrt{2}$ د]

٢ إذا كان حجم مضرة هو $\pi\sqrt{3}r^2$ فإن طول نصف قطرها
[$\sqrt{3}r$ د $\sqrt{3}r^2$ د $\sqrt{3}r^3$ د $\sqrt{3}r^4$ د]

٣ إذا كانت $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = م$ ، $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = ن$ فإن
[$م-ن$ د $م+ن$ د $م \times ن$ د $م \div ن$]

٤ $[\infty, 2] \cup [-1, \infty) =$
[$[-1, 2]$ د $[-1, \infty)$ د $[\infty, 2]$ د \emptyset]

٢ (١) أوجد في ح مجموعة حل المتباينة $1 \leq x - 2 < 4$ في صورة فترة



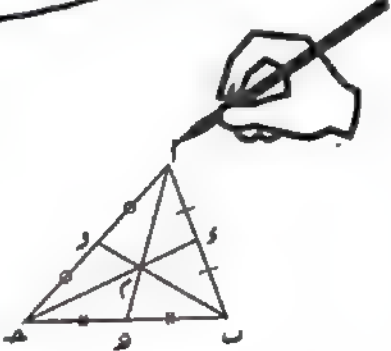
٣ الجدول الآتي لتوزيع تكراري لدرجات ٢٠ طالباً في مادة الرياضيات

الدرجات	-٢	-٤	-٦	-٨	-١٠	المجموع
التكرار	٢	٤	٦	٥	٣	٢٠

١ أوجد الوسط الحسابي

٢ أوجد المنوال بيانياً

نتيجه الهندسة

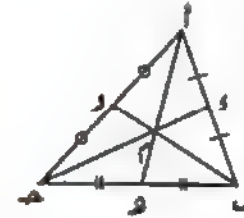
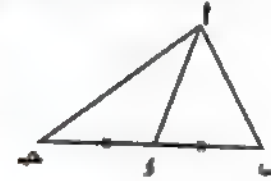


متوسطات المثلث

الوحدة الرابعة

تعريف

المتوسط في المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من أي رأس من رؤوسه إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس



فمثلاً: ΔABC فيه D منتصف BC

فيكون AD متوسط للمثلث

وبالطبع كل ضلع في المثلث يمكن أن

ننصفه ونرسم متوسط

أي أن أي مثلث له ثلاث متوسطات

نظرية

متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة

فمثلاً: هي الشكل السابق نجد أن:

المتوسطات AD ، BE ، CF تتقاطع جميعاً في نقطة G

ونقطة تقاطع المتوسطات هي أي مثلث لها خاصية مهمة جداً وهي ما يلي:

نظرية

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ٢:١ من جهة القاعدة

ملاحظة

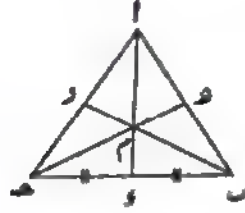
إذا كان AD متوسطاً في ΔABC ، M هي

نقطة تقاطع متوسطات المثلث فلنا نستنتج ما يلي:

$$AM = \frac{2}{3} AD, \quad MD = \frac{1}{3} AD$$

$$AM = \frac{2}{3} AD, \quad MD = \frac{1}{3} AD$$

$$AM = \frac{2}{3} AD, \quad MD = \frac{1}{3} AD$$



فمثلاً: هي الشكل السابق إذا كان $AD = 6$ ، فإن $AM = 4$ ، $MD = 2$

ونلاحظ أن: $AM = \frac{2}{3} AD$ ، وأن $MD = \frac{1}{3} AD$ لأن $AD = 6$ ، $AM = 4$ ، $MD = 2$

إذا كان AD متوسطاً في ΔABC ، $M \in AD$ بحيث $AM = \frac{2}{3} AD$

فإن M هي نقطة تقاطع متوسطات ΔABC ويكون $MD = \frac{1}{3} AD$

لأنهما يمران بنقطة M وتكون MD منتصف AD وتكون MD منتصف AD

إذا كان ΔABC متساوي الأضلاع كانت متوسطاته الثلاثة متساوية في الطول

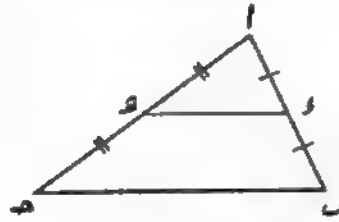
حقيقة

في ΔABC إذا كان

D منتصف BC ، E منتصف AC

$$\text{فإن: } ① \quad DE = \frac{1}{2} AB$$

$$② \quad DE \parallel AB$$



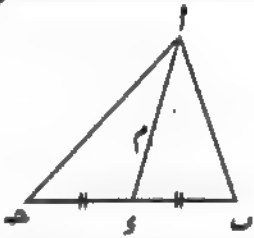
أمثلة توضيحية

في الشكل المقابل:

AD في ΔABC فيه AD متوسط، M نقطة تقاطع

متوسطاته فإذا كان $AD = 9$ ، $AM = 8$

فأوجد طول كل من: MD ، AM ، AD





البرهان

في ΔABC هـ

$\therefore \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FD}$ متوسطات متقاطعان في م

\therefore م هي نقطة

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

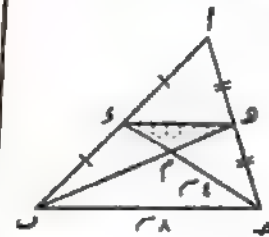
$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

تدريب (٢)

في الشكل المقابل :



و هـ منتصف \overline{AB} ، \overline{AC} هـ

على الترتيب حيث $\overline{DE} \cap \overline{BC} = \{M\}$ ،

$\overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\overline{DM} = \overline{MC}$ ، $\overline{EM} = \overline{MB}$

أكمل ما يأتي لإيجاد محيط ΔDEF و

المعطيات :

المطلوب :

في ΔABC هـ

$\therefore \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FD}$ متوسطات متقاطعان في م

\therefore م هي نقطة

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

في ΔABC هـ

\therefore هـ منتصف \overline{AB} ، \overline{AC} هـ

$\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\overline{DM} = \overline{MC}$ ، $\overline{EM} = \overline{MB}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\overline{DM} = \overline{MC}$ ، $\overline{EM} = \overline{MB}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\overline{DM} = \overline{MC}$ ، $\overline{EM} = \overline{MB}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\overline{DM} = \overline{MC}$ ، $\overline{EM} = \overline{MB}$

تمارين (١)

على متوسطات المثلث



أولاً : راجع معنا واختر نفسك

عزيزي الطالب :



في هذا المكان من كل تمرين ستجد :

اسئلة لمراجعة ما سبق في صورة اختبار تراكمي على ما سبق دراسته
تجيبه في نفس الورقة قبل أن تدخل في الدرس الجديد وهذا يجعلك تتذكر
ما درست باستمرار ولا تنساه ويجعلك في مراجعة مستمرة لدروسك السابقة
مما يجعلك في تواصل مع ما درست وأيضاً يعودك على الاختبارات
ويزيل رهبتها في نفسك وهذه الميزة يقدمها لك كتاب الماهر فقط

ثانياً : اجب عما يأتي :



مسائل المستوى الأول

١) أكمل ما يأتي :

(١) متوسطات المثلث تتقاطع

(٢) نقطة تقاطع متوسطات Δ تقسم كل منها بنسبة من جهة الرأس

(ب) في الشكل المقابل :

ΔABC هـ فيه و هـ منتصف \overline{AB} ، \overline{AC} هـ

$\overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\overline{DM} = \overline{MC}$ ، $\overline{EM} = \overline{MB}$ فإن :

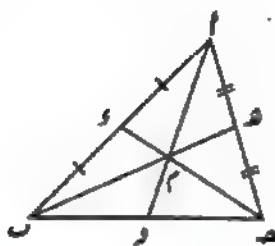
$\overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\overline{DM} = \overline{MC}$ ، $\overline{EM} = \overline{MB}$

$\overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\overline{DM} = \overline{MC}$ ، $\overline{EM} = \overline{MB}$

$\overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\overline{DM} = \overline{MC}$ ، $\overline{EM} = \overline{MB}$

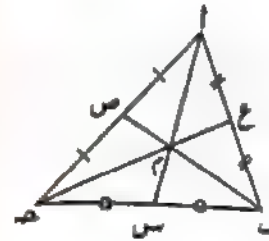
$\overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\overline{DM} = \overline{MC}$ ، $\overline{EM} = \overline{MB}$

$\overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\overline{DM} = \overline{MC}$ ، $\overline{EM} = \overline{MB}$





(ح) في الشكل المقابل :



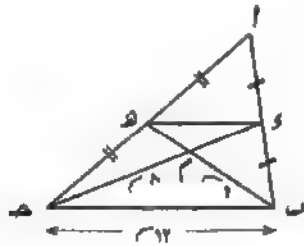
- ع ، س ، م ، من منتصفات \overline{AB} ، \overline{BC} ، \overline{AC} ،
 إذا كان $AM = 8$ فإن $AS = \dots\dots\dots$
 إذا كان $AB = 10$ فإن $AE = \dots\dots\dots$
 إذا كان $CM = 8$ فإن $MB = \dots\dots\dots$
 إذا كان $BE = 9$ فإن $EM = \dots\dots\dots$

(٢) اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

- ① نقطة تقاطع متوسطات Δ تقسم كل منها بنسبة من جهة القاعدة
 [١:٢ د ٢:١ د ٣:٢ د ٣:١ د]
- ② في ΔABC إذا كانت نقطة M منتصف \overline{BC} فإن \overline{AM} تسمى
 [ارتفاع د متوسط د وتر د منتصف للزاوية د]
- ③ عدد متوسطات المثلث [واحد د اثنين د ثلاثة د عند لا نهائي]
- ④ في ΔABC إذا كان \overline{AM} متوسط ، M نقطة تقاطع متوسطاته فإن $AM = \dots\dots\dots$
 [٢ د ١ د $\frac{1}{2}$ د $\frac{2}{3}$ د $\frac{1}{3}$]
- ⑤ في ΔABC إذا كان \overline{AM} متوسط ، M نقطة تقاطع متوسطاته فإن $AM : \overline{AM} = \dots\dots\dots$
 [٢:١ د ٢:٢ د ٣:٢ د ٢:٣ د]
- ⑥ في ΔABC إذا كان \overline{AM} متوسط ، M نقطة تقاطع متوسطاته ، $AM = 6$ فإن $AM = \dots\dots\dots$
 [٢ د ٣ د ١٢ د ١٨]
- ⑦ في ΔABC إذا كان \overline{AM} متوسط ، M نقطة تقاطع متوسطاته ، $AM = 2$ فإن $AM = \dots\dots\dots$
 [١ د ٣ د ٤ د ٦]
- ⑧ في ΔABC إذا كان \overline{AM} متوسط ، M نقطة تقاطع متوسطاته ، $AM = 4$ فإن $AM = \dots\dots\dots$
 [٦ د ١٢ د ٨ د ٢]

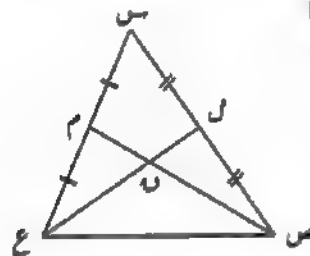
(٣) اكمل ما يأتي باستخدام معطيات كل شكل :

②



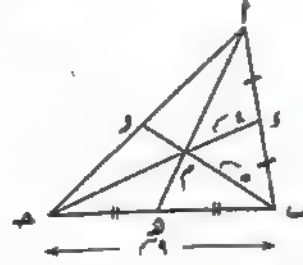
- $AM = \dots\dots\dots$ ، $BM = \dots\dots\dots$ ، $CM = \dots\dots\dots$
 $AM = \dots\dots\dots$ ، $BM = \dots\dots\dots$ ، $CM = \dots\dots\dots$

④



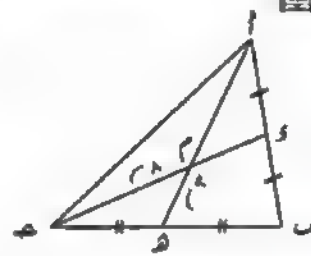
- إذا كان $AM = 18$ ، $BM = 15$ ، $CM = 12$ ،
 $AM = \dots\dots\dots$ ، $BM = \dots\dots\dots$ ، $CM = \dots\dots\dots$
 $AM = \dots\dots\dots$ ، $BM = \dots\dots\dots$ ، $CM = \dots\dots\dots$

①



- $AM = \dots\dots\dots$ ، $BM = \dots\dots\dots$ ، $CM = \dots\dots\dots$
 $AM = \dots\dots\dots$ ، $BM = \dots\dots\dots$ ، $CM = \dots\dots\dots$

③

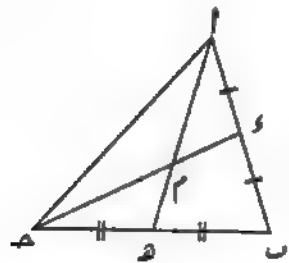


- $AM = \dots\dots\dots$ ، $BM = \dots\dots\dots$ ، $CM = \dots\dots\dots$
 $AM = \dots\dots\dots$ ، $BM = \dots\dots\dots$ ، $CM = \dots\dots\dots$



مسائل المستوى الثاني

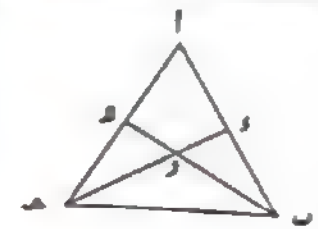
(٤) في الشكل المقابل :



- $AM = \dots\dots\dots$ ، $BM = \dots\dots\dots$ ، $CM = \dots\dots\dots$
 $AM = \dots\dots\dots$ ، $BM = \dots\dots\dots$ ، $CM = \dots\dots\dots$
 $AM = \dots\dots\dots$ ، $BM = \dots\dots\dots$ ، $CM = \dots\dots\dots$



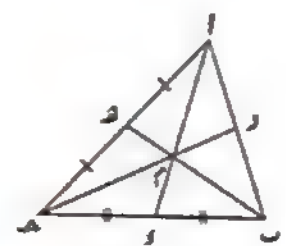
٥) في الشكل المقابل :



ب د ، هـ د متوسطان في Δ ا ب هـ
تقاطعا في ر ، هـ د = د ، د = د
فأوجد طول كل من : د و ب و

[٣٩، ٣٢]

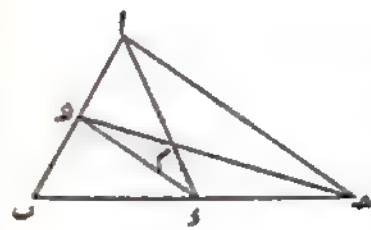
٦) في الشكل المقابل :



ا ب هـ د ، و منتصف ب هـ ، و منتصف ا هـ ،
فإذا تقاطع ا د ، ب د في م ،
رسم هـ م فمقطع ا ب في ر ،
وكان هـ د = ر ، ا ب = ا ب ،
فأوجد طول كل من : ا د ، ا م ، و ا م هـ

[٣٦، ٣٩، ٣٢]

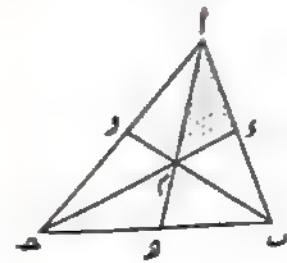
٧) في الشكل المقابل :



ا ب هـ د ، ا د ، هـ د متوسطان
فيه يتقاطعان في م ،
ا د = ا د ، ا د = ا د ،
ا د = ا د ،
أوجد محيط خط Δ م و د

[٣٣]

٨) في الشكل المقابل :

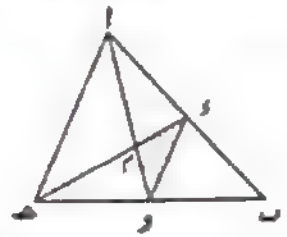


ا ب هـ د فيه م نقطة تقاطع متوسطاته ،
ا ب = ا ب ، ا ب = ا ب ،
أوجد محيط خط Δ ا د م

[٣٨]



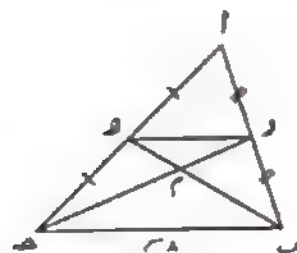
٩) في الشكل المقابل :



ا د ، هـ د متوسطان في Δ ا ب هـ
تقاطعا في م ومحيط Δ ا م هـ = ١٨
فأوجد محيط خط Δ م و د

[٣٩]

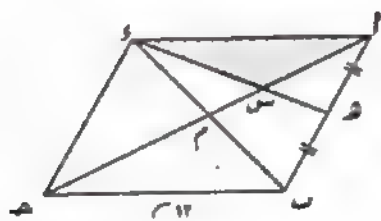
١٠) في الشكل المقابل :



ا ب هـ د فيه و منتصف ا ب ،
و منتصف ا هـ ، ب د و هـ = { م }
فإذا كان ب هـ = ا هـ ، ا هـ = ا هـ ،
هـ د = م = ٦ ، فأوجد محيط Δ م و د

[٣٩]

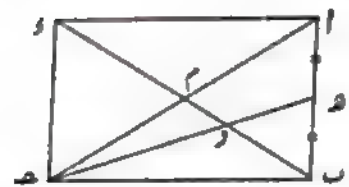
١١) في الشكل المقابل :



ا ب هـ د متوازي أضلاع فيه
ب هـ = ا هـ ، تقاطع قطراه في م ،
و منتصف ا ب ، ا هـ و د = { س }
هـ د = ا د ، ا د = ا د ،
أوجد محيط خط Δ ا س و

[٣٧]

١٢) في الشكل المقابل :



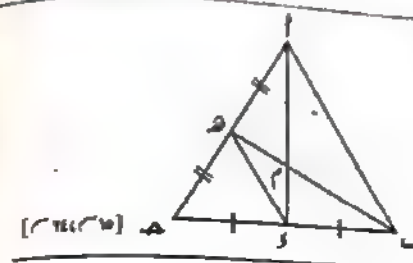
ا ب هـ د مستطيل تقاطع
قطراه في م ، هـ د منتصف ا ب ،
هـ د و ب = { ر } ، ب و = ا د ،
اثبت أن : و نقطة تقاطع متوسطات ا ب هـ

[٣٦]

٢) أوجد طول ا م

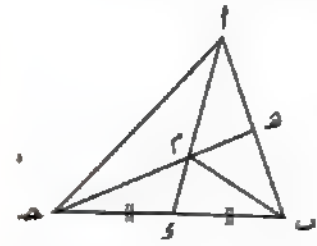


١٣ في الشكل المقابل :



أ ب هـ Δ فيه أ د ، ب هـ متوسطان ،
 أ د \cap ب هـ = { م } ، ب د = ١٢ سم ،
 أ د = ٩ سم ، ب هـ = ٥ سم ،
 أوجد محيط كل من : Δ أ م د ، Δ م ب هـ

١٤ في الشكل المقابل :



م ب هـ Δ ، م منتصف ب هـ ، أ د \parallel م هـ ،
 بحيث م أ = ٢ م هـ ، ب د = ١٢ سم ،
 أ ب \cap م هـ = { د }
 أثبت أن : أ د = د هـ

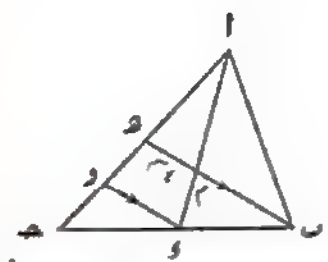
١٥ أ ب هـ متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، د منتصف ب هـ ،

رسمت د هـ فقطعت أ هـ في و أثبت أن :

- ① ب و ينصف هـ د ② هـ و = $\frac{1}{3}$ أ هـ

مسائل التفوق

١٦ في الشكل المقابل :



أ ب هـ Δ فيه أ د متوسط ، م \in أ د ،
 بحيث م أ = ٢ م د ، ب م \cap أ هـ = { د } ،
 و \in هـ د بحيث و د \parallel ب هـ ، د هـ = ٤ سم ،
 أوجد طول و د

١٧ أ ب هـ Δ فيه د منتصف ب هـ ، م \in أ د بحيث م أ = ٢ م د ، رسم هـ م

فقطعت أ ب في و ، و \in ب هـ بحيث ب هـ = هـ د ، أثبت أن : أ د = ٣ هـ م

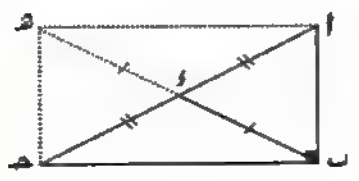
١٨ أ ب هـ Δ ، م نقطة تقاطع متوسطاته أ د ، ب هـ ، هـ د

أثبت أن : م نقطة تقاطع متوسطات Δ و د و

متوسط المثلث القائم

نظرية

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة
 يساوي نصف طول وتر هذا المثلث



أ ب هـ مثلث فيه \angle (ب) = 90°
 ب د متوسط في Δ أ ب هـ

إثبات أن ب د = $\frac{1}{2}$ أ هـ

ترسم ب د وناخذ نقطة م \in ب د
 بحيث ب د = ٢ م هـ

البرهان : الشكل أ ب هـ د فيه أ هـ ، ب د ينصف كل منهما الآخر

الشكل أ ب هـ د متوازي أضلاع

∴ \angle (ب) = 90° ∴ الشكل أ ب هـ د مستطيل

∴ ب د = أ هـ ، ب د = ٢ م هـ ∴ ب د = $\frac{1}{2}$ أ هـ #

مثلاً : إذا كان Δ أ ب هـ قائم الزاوية في ب ،

أ هـ = ٨ سم ، د منتصف أ هـ

فإن طول المتوسط ب د = ٤ سم



عكس النظرية

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من إحدى رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



أب هـ مثلث، ب هـ متوسط،

$$| \text{ب هـ} | = | \text{ب د} | = | \text{ب أ} |$$

إثبات أن (ب هـ أ ب) = ٩٠°

نرسم ب هـ ونأخذ نقطة د على ب هـ

$$\text{بحيث } | \text{ب د} | = | \text{ب هـ} |$$

$$\therefore | \text{ب د} | = | \text{ب هـ} | = | \text{ب أ} | = \frac{1}{2} | \text{أ ب} |$$

$$\therefore | \text{ب د} | = | \text{ب هـ} |$$

الشكل أ ب هـ د فيه أ هـ، ب د متساويان في الطول

وينصف كل منهما الآخر

الشكل أ ب هـ د مستطيل

$$\therefore (\text{ب هـ أ ب}) = ٩٠^\circ$$

المعطيات

المطلوب

العمل

البرهان

فبتأمل: في Δ أ ب هـ

إذا كان طول المتوسط

$$| \text{ب هـ} | = \frac{1}{2} | \text{طول أ ب} |$$

فإن Δ أ ب هـ قائم الزاوية في ب

أي في الزاوية التي خرج منها المتوسط وإذا كان

$$| \text{أ هـ} | = | \text{ب هـ} | \text{، ومنتصف أ هـ، ب هـ} \text{ فإن } (\text{ب هـ أ ب}) = ٩٠^\circ$$



نقطة المثلث القائم

نتيجة هامة

طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر



فبتأمل: في Δ أ ب هـ القائم الزاوية في ب،

$$(\text{ب هـ أ}) = ٣٠^\circ \text{، إذا كان } | \text{أ هـ} | = ١٠$$

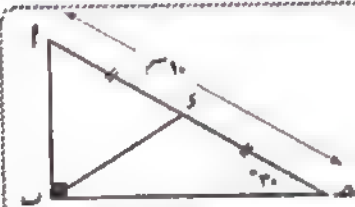
فإن | أ ب | = ٥ لأنه الضلع المقابل

للزاوية التي قياسها ٣٠°

ملاحظة

المثلث القائم الزاوية الذي قياس إحدى زواياه ٣٠° يكون قياس الزاوية الثالثة فيه ٦٠° ولذلك يسمى مثلث ثلاثيني ستيني

أمثلة توضيحية



١ في الشكل المقابل:

$$\text{أ ب هـ } \Delta \text{ فيه } (\text{ب هـ أ}) = ٩٠^\circ$$

$$(\text{ب هـ أ}) = ٣٠^\circ \text{، } | \text{أ هـ} | = ١٠$$

ومنتصف أ هـ أو د محيط Δ أ ب هـ

مكة العمل

$$(\text{ب هـ أ}) = ٩٠^\circ \text{، } (\text{ب هـ أ}) = ٣٠^\circ \text{، } | \text{أ هـ} | = ١٠$$

محيط Δ أ ب هـ

$$\therefore \Delta \text{ أ ب هـ قائم الزاوية في ب، } (\text{ب هـ أ}) = ٣٠^\circ$$

$$\therefore | \text{أ ب} | = \frac{1}{2} | \text{أ هـ} | = \frac{1}{2} \times ١٠ = ٥$$

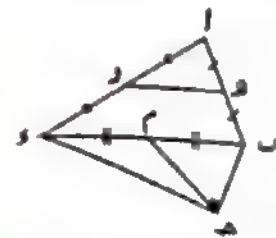
$$\therefore | \text{أ ب} | = ٥ \text{، } | \text{أ هـ} | = ١٠$$

\therefore ب هـ متوسط في Δ أ ب هـ القائم الزاوية في ب

$$\therefore | \text{ب هـ} | = \frac{1}{2} | \text{أ هـ} | = \frac{1}{2} \times ١٠ = ٥$$

$$\text{محيط } \Delta \text{ أ ب هـ} = | \text{أ ب} | + | \text{ب هـ} | + | \text{أ هـ} |$$

$$= ٥ + ٥ + ١٠ = ٢٠$$



في الشكل المقابل:
 ا ب ح مثلث رياضي فيه
 ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$ ، ه و ،
 م منتصفات ا ب ، آ و ، ن و على الترتيب
 اثبت ان : ح م = و د



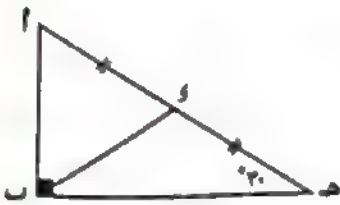
وكي الحل

المعطيات : ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$ ، ه و ، م منتصفات ا ب ، آ و ، ن و
 المطلوب : ح م = و د
 البرهان : Δ ا ب ح وفيه ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$ ، ح م متوسط
 : ح م = $\frac{1}{2}$ ب و (نظرية (1)
 Δ ا ب و فيه م منتصف ا ب ، و منتصف آ و
 : و د = $\frac{1}{2}$ ب و (نظرية (2)
 من (1) ، (2) ينتج ان :
 ح م = و د

#

أمثلة لتدريب

تدريب (1)



في الشكل المقابل :
 ا ب ح Δ قائم الزاوية في ب ،
 ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$ ، ا ه = ح س ،
 و منتصف ا ه

اكمل البرهان الاتي لإيجاد محيط Δ ا ب و

المعطيات :
 المطلوب :



البرهان

: و منتصف ا ه : ن و متوسط في Δ ا ب ح
 : ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$: ن و = و د
 : ا ه = : ن و = و د (1)
 Δ ا ب ح وفيه ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$: ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$: ن (د ب ح و)
 : ن ا ب = x = (2)
 : و منتصف ا ه ، ا ه = ح س : ن ا ب = و د (3)
 من (1) ، (2) ، (3) :
 : محيط Δ ا ب و = ا ب + +
 : محيط Δ ا ب و = + + = #

تدريب (2)



في الشكل المقابل :
 ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$: ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$: ن (د ب ح و)
 : و منتصف ا ه ، $\angle 90^\circ$: ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$: ن (د ب ح و)
 اكمل البرهان الاتي لإثبات ان ا ب = و د

المعطيات :
 المطلوب :
 البرهان :

: Δ ا ب ح وفيه ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$: ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$: ن (د ب ح و)
 : ن ا ب = (1)
 : و منتصف ا ه : ن و متوسط في Δ
 Δ ا ب ح وفيه ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$: ن (د ب ح و) ، $\angle 90^\circ$: ن (د ب ح و)
 : ن و د = (2)
 من (1) ، (2) ينتج ان : = #

على متوسط المثلث القائم

نصف (٢٠)

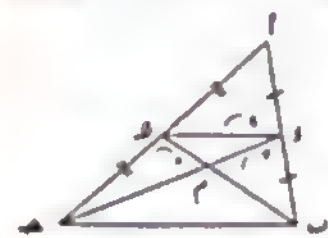
أولاً: راجع صفا واختبر نفسك

ثانياً: صانع سؤال ومراجعة

(١) أعمل ما يأتي:

- متوسطات المثلث تقاطع
- نقطه تقاطع متوسطات Δ تقسم كل منها بنصف ... من جهة القاعدة
- إذا صعد \bar{AD} متوسط في ΔABC ، M نقطة تقاطع متوسطاته
فإن $AM : MD = 2 : 1$
- إذا صعد \bar{AD} متوسط في ΔABC ، M نقطة تقاطع متوسطاته وسكن $AM = 4$
فإن $AD = \dots\dots\dots$

(ب) فم الشكل المقابل:



- \bar{AD} ، \bar{BE} ، \bar{CF} متوسطات في ΔABC
مقاطعتان في M ، $AM = 2$ ، $MD = 1$ ، $BM = 3$ ، $ME = 1.5$
 $CM = 2.5$ ، $MF = 1.25$ محيط ΔM $= \dots\dots\dots$

٣

- (ج) ΔABC ، \bar{AD} منتصف \bar{BC} ، $M \in \bar{AD}$ بحيث $AM = 2$ ، $MD = 1$
رسم \bar{DM} قطع \bar{AB} في E فإذا صعد $\bar{DE} = 1.5$ أوجد طول \bar{DM}

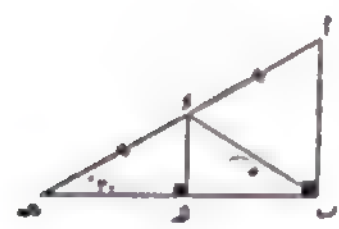
٢

ثانياً: اجب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

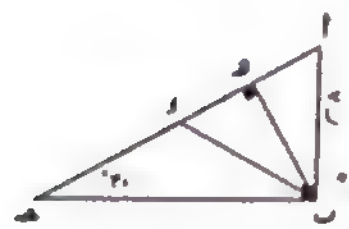
(٢) أعمل ما يأتي:

(أ) فم الشكل المقابل:



- ΔABC قائم الزاوية في C ،
و منتصف \bar{AC} ، $\bar{CD} \perp \bar{AD}$ ،
 $\angle C = 30^\circ$ ، $\angle B = 60^\circ$ ،
فإن:
- $\angle A = \dots\dots\dots$ ، $\angle D = \dots\dots\dots$
 - $\angle A = \dots\dots\dots$ ، $\angle D = \dots\dots\dots$

(ب) فم الشكل المقابل:



- ΔABC قائم الزاوية في C ،
و منتصف \bar{AC} ، $\angle C = 30^\circ$ ،
 $\angle B = 60^\circ$ ، $\bar{CD} \perp \bar{AD}$ ،
فإن:
- $\angle A = \dots\dots\dots$ ، $\angle D = \dots\dots\dots$
 - $\angle A = \dots\dots\dots$ ، $\angle D = \dots\dots\dots$
 - $\angle A = \dots\dots\dots$ ، $\angle D = \dots\dots\dots$
 - محيط $\Delta ABC = \dots\dots\dots$

(ج) فم الشكل المقابل:



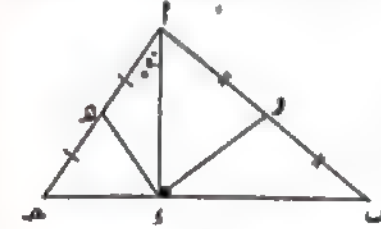
- ΔABC قائم الزاوية في C ،
 $\angle C = 30^\circ$ ، \bar{CD} منتصف \bar{AC} ،
 \bar{AD} ، \bar{CD} على الترتيب ،
و منتصف \bar{BC} ، $\angle C = 60^\circ$ ،
فإن:
- $\angle A = \dots\dots\dots$ ، $\angle D = \dots\dots\dots$
 - $\angle A = \dots\dots\dots$ ، $\angle D = \dots\dots\dots$
 - $\angle A = \dots\dots\dots$ ، $\angle D = \dots\dots\dots$



٣ اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

- ١ طول متوسط Δ القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي الوتر
[طول $\frac{1}{2}$ نصف طول $\frac{1}{2}$ ضعف طول $\frac{1}{3}$ ثلث طول]
- ٢ طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30° في أي مثلث يساوي
[طول الوتر $\frac{1}{2}$ نصف طول الوتر $\frac{1}{3}$ ضعف طول الوتر $\frac{1}{4}$ ليس أي منها لأن المثلث ليس قائم]
- ٣ طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30° في Δ القائم الزاوية يساوي الوتر
[نصف طول $\frac{1}{2}$ ضعف طول $\frac{1}{3}$ طول $\frac{1}{4}$ ثلث طول]

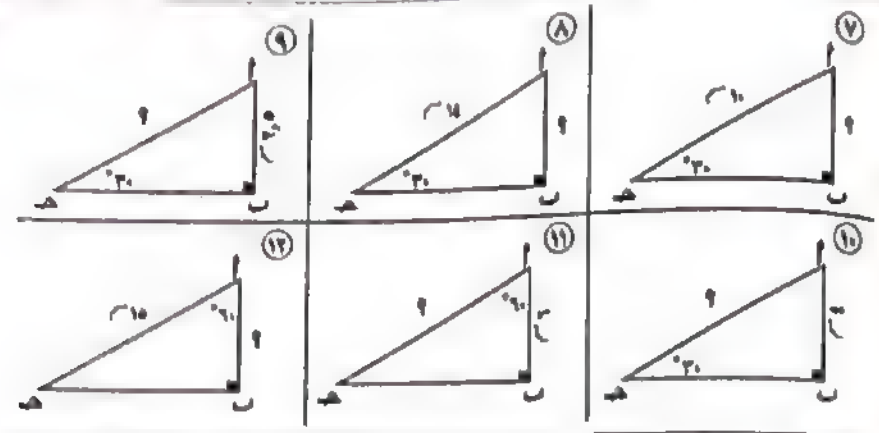
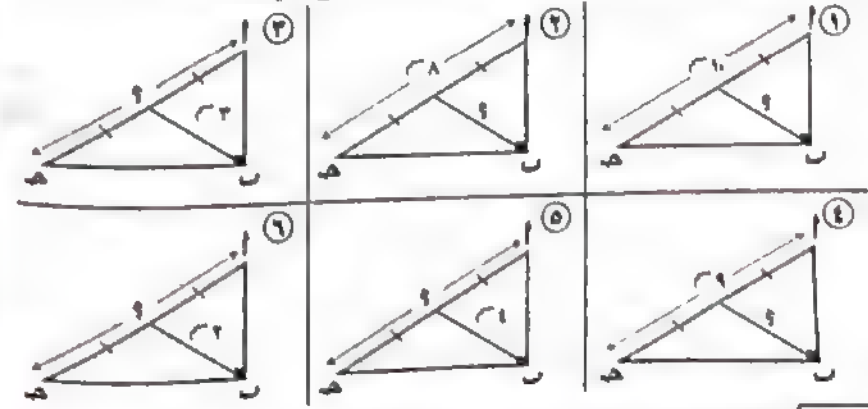
٤ في الشكل المقابل :



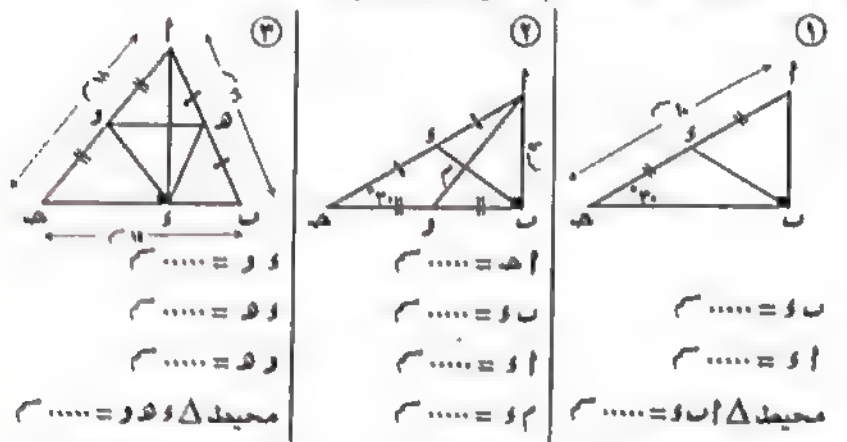
إذا كان $AD \perp BC$ ، ومنتصف AB ،
ومنتصف AC ، Q ، $(\angle ADB) = 30^\circ$ ،
 $AB = 10$ ، $AC = 8$ ، $BD = 4$ ، فإن :

$BC = \dots\dots\dots$	[١٠ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٠٥]
$AD = \dots\dots\dots$	[٤ ، ٨ ، ١٦ ، ١٢]
$DC = \dots\dots\dots$	[٤ ، ٨ ، ٥ ، ١٠]
$BC = \dots\dots\dots$	[٥ ، ١٠ ، ٤ ، $AB - 4$]

٤ أوجد مستقيماً بالمتعلقات التي على الرسم أطوال الأضلاع التي عليها العلامة (٩) :

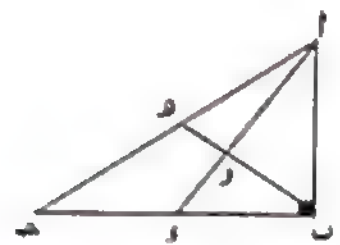


٥ أكمل ما يأتي باستخدام معطيات كل شكل :



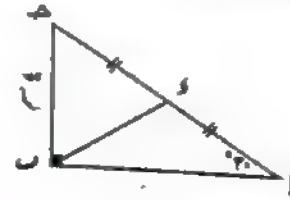
٦ في الشكل المقابل :

AB ، Δ قائم الزاوية في C ،
 AD ، AO متوسطان متقاطعان في O
فإذا كان $AC = 12$
فأوجد طول BC





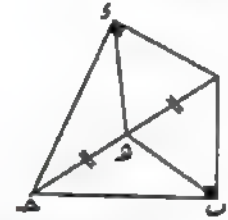
٧ في الشكل المقابل :



[٣٣]

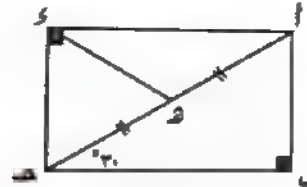
أ ب هـ Δ قائم الزاوية في ب، $\angle \text{أ} = 30^\circ$ ،
و منتصف أ هـ ، $\text{ب هـ} = \text{ب د}$
أثبت أن : Δ و ب هـ متساوي الأضلاع
وأوجد محيطه

٨ في الشكل المقابل :



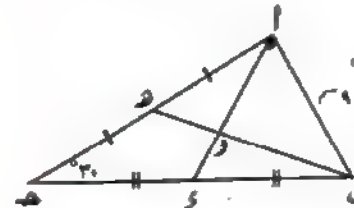
أ ب هـ و شكل رباعي فيه
 $\angle \text{ب} = \angle \text{د} = 90^\circ$ ،
هـ منتصف أ هـ
أثبت أن : $\text{ب هـ} = \text{د هـ}$

٩ في الشكل المقابل :



أ ب هـ و مستطيل فيه
 $\angle \text{ب} = \angle \text{د} = 90^\circ$ ،
هـ منتصف أ هـ
أثبت أن : $\text{أ ب} = \text{و د}$

١٠ في الشكل المقابل :



[٣٢]

أ ب هـ Δ قائم الزاوية في أ ،
و منتصف ب هـ ، هـ منتصف أ هـ ،
و $\text{أ ب} \cap \text{و د} = \text{هـ}$ ، $\angle \text{أ} = 30^\circ$ ،
 $\text{أ ب} = ٩$ ، $\text{ب د} = ١٢$
أوجد محيط Δ ب و د

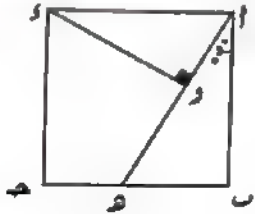
١١ في الشكل المقابل :



[٣٨]

أ ب هـ Δ قائم الزاوية في ب ،
و منتصف أ هـ ، رسم و هـ \perp ب و
بحيث $\angle \text{ب} = \angle \text{د} = 30^\circ$ ،
إذا كان $\text{ب هـ} = ٨$ فأوجد طول أ هـ

١٢ في الشكل المقابل :



[٣٠٠]

أ ب هـ و مربع ، $\text{هـ} \in \text{ب هـ}$
بحيث $\angle \text{ب} = \angle \text{د} = 30^\circ$ ، و أ هـ
بحيث $\text{و د} \perp \text{أ هـ}$ فإذا كان $\text{أ د} = ٥$
فأوجد : مساحة المربع

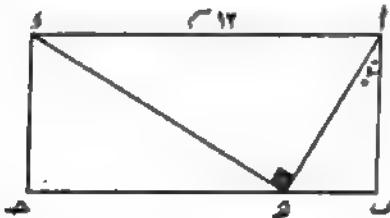
١٣ في الشكل المقابل :



[٣٤]

أ ب هـ Δ قائم الزاوية في ب ،
 $\text{هـ} \in \text{ب هـ}$ ، $\text{أ هـ} \perp \text{و د}$ ،
 $\angle \text{ب} = \angle \text{د} = 30^\circ$ ، $\text{ب هـ} = ٥$
أوجد طول و هـ

١٤ في الشكل المقابل :



[٣٢]

أ ب هـ و مستطيل ، $\text{هـ} \in \text{ب هـ}$
بحيث $\angle \text{ب} = \angle \text{د} = 90^\circ$ ، $\text{ب هـ} = ١٢$
فإذا كان $\angle \text{ب} = \angle \text{د} = 30^\circ$
فأوجد طول ب هـ

١٥ في الشكل المقابل :

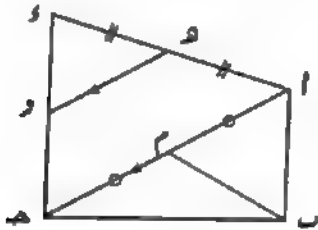


[٣٥]

أ ب هـ Δ قائم الزاوية في ب ،
 $\angle \text{ب} = \angle \text{د} = 30^\circ$ ، $\text{هـ} \in \text{أ هـ}$
بحيث $\text{ب هـ} \perp \text{أ هـ}$ فإذا كان $\text{ب هـ} = ٦$
فأوجد طول أ هـ

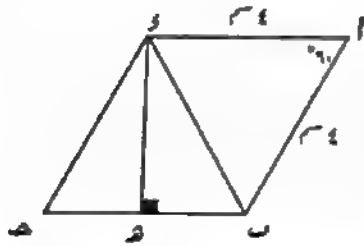


❷ في الشكل المقابل :



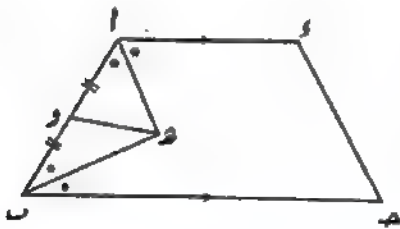
مسائل المتفوقين

٢٢ في الشكل المقابل :



١) $\overline{AB} = \overline{BC}$ ، $\overline{AC} = 15$ ، $\angle C = 90^\circ$ ،
 ٢) $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع ، $\overline{AB} = 10$ ، $\overline{AC} = 10$ ، $\overline{BC} = 10$ ،
 ٣) $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع ، $\overline{AB} = 10$ ، $\overline{AC} = 10$ ، $\overline{BC} = 10$ ،
 ٤) $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع ، $\overline{AB} = 10$ ، $\overline{AC} = 10$ ، $\overline{BC} = 10$ ،
 ٥) $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع ، $\overline{AB} = 10$ ، $\overline{AC} = 10$ ، $\overline{BC} = 10$ ،
 ٦) $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع ، $\overline{AB} = 10$ ، $\overline{AC} = 10$ ، $\overline{BC} = 10$ ،
 ٧) $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع ، $\overline{AB} = 10$ ، $\overline{AC} = 10$ ، $\overline{BC} = 10$ ،
 ٨) $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع ، $\overline{AB} = 10$ ، $\overline{AC} = 10$ ، $\overline{BC} = 10$ ،
 ٩) $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع ، $\overline{AB} = 10$ ، $\overline{AC} = 10$ ، $\overline{BC} = 10$ ،
 ١٠) $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع ، $\overline{AB} = 10$ ، $\overline{AC} = 10$ ، $\overline{BC} = 10$ ،

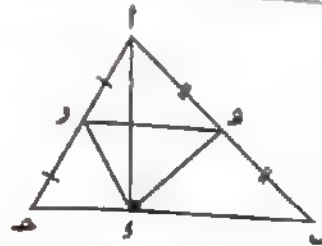
٣٤ في الشكل المقابل :



ا. ه. و شكل رياضي فيه
 ا و // ب ه ، ا ه ينصف د ا ،
 ب ه ينصف د ب ، و منتصف ا ب
 أثبت ان ه و = $\frac{1}{4}$ ا ب



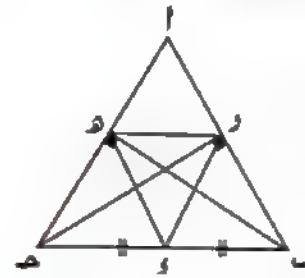
٦٦ في الشكل المقابل :



ا ب هـ د ، و منتصفى ا ب ، ا هـ
 على الترتيب ، ا و ا ب يقطعها في و ،
 ا ب = ا ب ، ا ب = ا ب ، ا ب = ا ب
 احس محيط Δ و و

[75]

١٧) في الشكل المقابل :

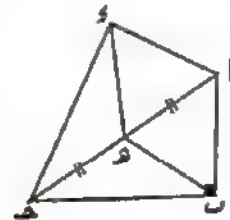


Δ ، $\exists \bar{a}$ بحيث $\bar{a} \perp \bar{a}$ ،
 ومنتصف \bar{a} ، $\exists \bar{a}$
 بحيث $\bar{a} \perp \bar{a}$
 اثبت ان: Δ و \bar{a} متساوي الساقين

(۷) ا ب م مثلث ، و منتصف ا ب فـ إذا كان ا ب = ۱۰ سم ، ب ج = ۵ سم

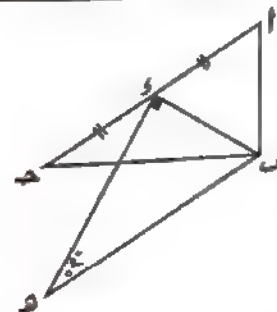
فاشده ان ، ٩ (١٥٠ م) = ٩٠

❧ في الشكل المقابل :



ا ب ح Δ قائم الزاوية في ب ،
 ه منتصف ا ح ، ب ه = ٤ سم ،
 أخذت النقطة و بحيث هو - ٤ سم
 اثبت أن : $\angle (ا و ح) = ٩٠^\circ$

٢٠) في الشكل المقابل :



ΔABC ، ومنتصف AC ،
 Q على BC بحيث $QC = 30$ ،
 $AB = BC = CA = 30$
 أثبت أن: ΔABC قائم الزاوية في B

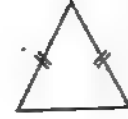
المثلث المتساوي الساقين

يصنف المثلث تبعاً لزواياه أو تبعاً لأضلاعه

- يصنف المثلث حسب قياسات زواياه إلى ثلاث أنواع هي :
 - ① مثلث حاد الزوايا ويكون فيه جميع زواياه حادة
 - ② مثلث قائم الزاوية ويكون فيه إحدى زواياه قائمة
 - ③ مثلث منفرج الزاوية ويكون فيه إحدى زواياه منفرجة
- مع ملاحظة أن المثلث لا يمكن أن يحتوي على أكثر من زاوية واحدة قائمة أو منفرجة وأن المثلث يحدد نوعه حسب نوع أكبر زواياه
- ويصنف المثلث حسب أطوال أضلاعه إلى ثلاث أنواع أيضاً وهي :



③ مثلث متساوي الأضلاع
(أو متطابق الضلعين)
وهو مثلث فيه جميع أضلاعه متساوية في الطول



② مثلث متساوي الساقين
(أو متطابق الضلعين)
وهو مثلث فيه ضلعان متساويان في الطول



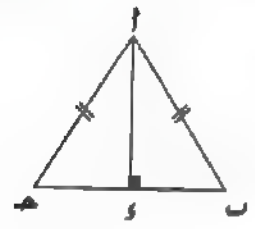
① مثلث مختلف الأضلاع
وهو مثلث أطوال أضلاعه الثلاثة مختلفة

فمثلاً : المثلث ABC فيه $AB = AC$ ، يسمى الضلعان المتساويان AB ، AC بساقي المثلث ويسمى الضلع الثالث BC قاعدة المثلث وتسمى B ، C بزوايتي القاعدة (وهما بنفس الحرفين المسمى بهما القاعدة) وتسمى A بزاوية رأس المثلث



نظرية المثلث المتساوي الساقين

زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان



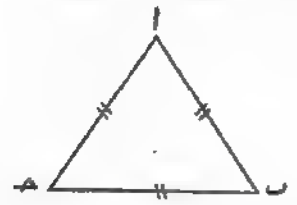
المعطيات : $\triangle ABC$ فيه $AB \equiv AC$
المطلوب : $\angle B \equiv \angle C$
العمل : نرسم $AD \perp BC$
البرهان : $\triangle ADB \cong \triangle ADC$ ، $\therefore \angle B \equiv \angle C$

فيها $\left. \begin{array}{l} \angle B \equiv \angle C \\ AB \equiv AC \end{array} \right\}$ معطى
أو ضلع مشترك

$\therefore \triangle ADB \equiv \triangle ADC$ وينتج من التطابق أن $\angle B \equiv \angle C$ #

نتيجة

إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة (متساوية في القياس) ويكون قياس كل منها 60°



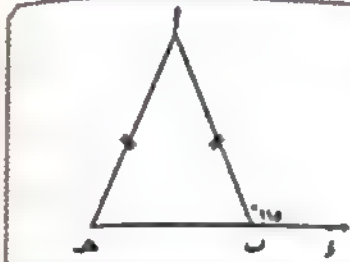
فمثلاً : إذا كان $\triangle ABC$ فيه $AB = BC = AC$
فإن $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

تذكر أن

- قياس أي زاوية خارجية للمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين عدا المجاورة لها
- كمالات الزوايا المتساوية في القياس تكون متساوية في القياس أيضاً
- مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة 180°



أشعة توضيحية



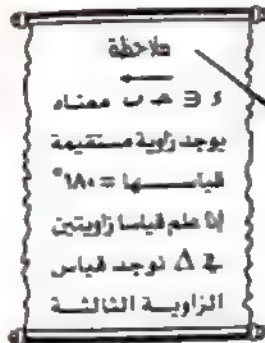
في الشكل المقابل:

$\angle C = 115^\circ$
 $\angle B = 125^\circ$
 احس قياسات زوايا $\triangle ABC$

الحل

المعطيات
 المطلوب
 البرهان

$\angle C = 115^\circ$
 $\angle B = 125^\circ$
 $\angle A = 180^\circ - 115^\circ - 125^\circ = 40^\circ$
 $\angle A = 40^\circ$
 $\angle B = 125^\circ$
 $\angle C = 115^\circ$
 مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC = 180^\circ$
 $40^\circ + 125^\circ + 115^\circ = 180^\circ$

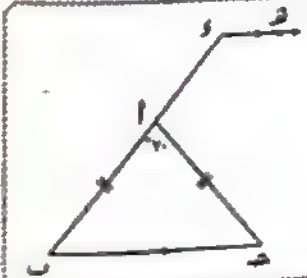


ملاحظة

$\angle C = 115^\circ$
 $\angle B = 125^\circ$
 $\angle A = 180^\circ - 115^\circ - 125^\circ = 40^\circ$
 $\angle A = 40^\circ$
 $\angle B = 125^\circ$
 $\angle C = 115^\circ$
 مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC = 180^\circ$
 $40^\circ + 125^\circ + 115^\circ = 180^\circ$

#

في الشكل المقابل:



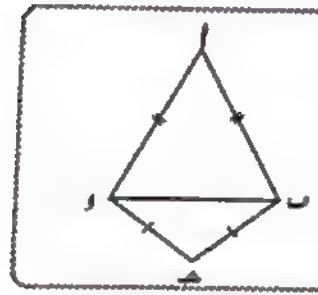
$\angle C = 115^\circ$
 $\angle B = 125^\circ$
 احس قياسات زوايا $\triangle ABC$

الحل



المعطيات
 المطلوب
 البرهان

$\angle C = 115^\circ$
 $\angle B = 125^\circ$
 $\angle A = 180^\circ - 115^\circ - 125^\circ = 40^\circ$
 $\angle A = 40^\circ$
 $\angle B = 125^\circ$
 $\angle C = 115^\circ$
 مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC = 180^\circ$
 $40^\circ + 125^\circ + 115^\circ = 180^\circ$



في الشكل المقابل:

$\angle C = 115^\circ$
 $\angle B = 125^\circ$
 $\angle A = 180^\circ - 115^\circ - 125^\circ = 40^\circ$
 $\angle A = 40^\circ$
 $\angle B = 125^\circ$
 $\angle C = 115^\circ$
 مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC = 180^\circ$
 $40^\circ + 125^\circ + 115^\circ = 180^\circ$

الحل

المعطيات
 المطلوب
 البرهان

$\angle C = 115^\circ$
 $\angle B = 125^\circ$
 $\angle A = 180^\circ - 115^\circ - 125^\circ = 40^\circ$
 $\angle A = 40^\circ$
 $\angle B = 125^\circ$
 $\angle C = 115^\circ$
 مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC = 180^\circ$
 $40^\circ + 125^\circ + 115^\circ = 180^\circ$

من (1) و (2) بالجمع:
 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
 $40^\circ + 125^\circ + 115^\circ = 180^\circ$



وقه الفصل الثالث



ΔABC فيه $AB = AC$
 $\angle A = 100^\circ$
 $\angle B = \angle C = 40^\circ$
 $\angle D = 10^\circ$
 $\angle E = 10^\circ$
 $\angle F = 10^\circ$

والجواب

المثلثات ΔABC و ΔDEF متشابهتان
 لأن $\angle A = \angle D = 100^\circ$
 $\angle B = \angle E = 40^\circ$
 $\angle C = \angle F = 40^\circ$

المطلوب

المطلوب

$\angle A = 100^\circ$
 $\angle B = 40^\circ$
 $\angle C = 40^\circ$
 $\angle D = 10^\circ$
 $\angle E = 10^\circ$
 $\angle F = 10^\circ$
 $\angle G = 10^\circ$
 $\angle H = 10^\circ$
 $\angle I = 10^\circ$
 $\angle J = 10^\circ$
 $\angle K = 10^\circ$
 $\angle L = 10^\circ$
 $\angle M = 10^\circ$
 $\angle N = 10^\circ$
 $\angle O = 10^\circ$
 $\angle P = 10^\circ$
 $\angle Q = 10^\circ$
 $\angle R = 10^\circ$
 $\angle S = 10^\circ$
 $\angle T = 10^\circ$
 $\angle U = 10^\circ$
 $\angle V = 10^\circ$
 $\angle W = 10^\circ$
 $\angle X = 10^\circ$
 $\angle Y = 10^\circ$
 $\angle Z = 10^\circ$



وقه الفصل الثالث



ΔABC فيه $AB = AC$
 $\angle A = 100^\circ$
 $\angle B = \angle C = 40^\circ$
 $\angle D = 10^\circ$
 $\angle E = 10^\circ$
 $\angle F = 10^\circ$

والجواب



المطلوب

المطلوب

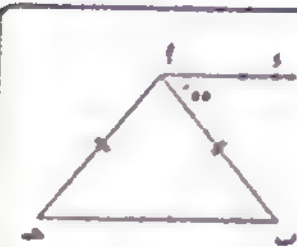
المطلوب

ΔABC فيه $AB = AC$
 $\angle A = 100^\circ$
 $\angle B = \angle C = 40^\circ$
 $\angle D = 10^\circ$
 $\angle E = 10^\circ$
 $\angle F = 10^\circ$
 $\angle G = 10^\circ$
 $\angle H = 10^\circ$
 $\angle I = 10^\circ$
 $\angle J = 10^\circ$
 $\angle K = 10^\circ$
 $\angle L = 10^\circ$
 $\angle M = 10^\circ$
 $\angle N = 10^\circ$
 $\angle O = 10^\circ$
 $\angle P = 10^\circ$
 $\angle Q = 10^\circ$
 $\angle R = 10^\circ$
 $\angle S = 10^\circ$
 $\angle T = 10^\circ$
 $\angle U = 10^\circ$
 $\angle V = 10^\circ$
 $\angle W = 10^\circ$
 $\angle X = 10^\circ$
 $\angle Y = 10^\circ$
 $\angle Z = 10^\circ$



المطلوب

المطلوب



ΔABC فيه $AB = AC$
 $\angle A = 100^\circ$
 $\angle B = \angle C = 40^\circ$
 $\angle D = 10^\circ$
 $\angle E = 10^\circ$
 $\angle F = 10^\circ$

المطلوب

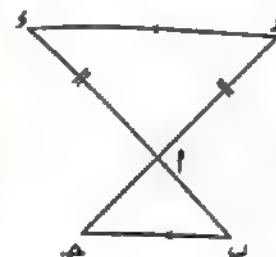
المطلوب

المطلوب

ΔABC فيه $AB = AC$
 $\angle A = 100^\circ$
 $\angle B = \angle C = 40^\circ$
 $\angle D = 10^\circ$
 $\angle E = 10^\circ$
 $\angle F = 10^\circ$
 $\angle G = 10^\circ$
 $\angle H = 10^\circ$
 $\angle I = 10^\circ$
 $\angle J = 10^\circ$
 $\angle K = 10^\circ$
 $\angle L = 10^\circ$
 $\angle M = 10^\circ$
 $\angle N = 10^\circ$
 $\angle O = 10^\circ$
 $\angle P = 10^\circ$
 $\angle Q = 10^\circ$
 $\angle R = 10^\circ$
 $\angle S = 10^\circ$
 $\angle T = 10^\circ$
 $\angle U = 10^\circ$
 $\angle V = 10^\circ$
 $\angle W = 10^\circ$
 $\angle X = 10^\circ$
 $\angle Y = 10^\circ$
 $\angle Z = 10^\circ$



تدريب (٢)



في الشكل المقابل :

$$AE = AF, \overline{ED} \parallel \overline{FB}$$

$$\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{D\}$$

أكمل ما يأتي لإثبات أن $\angle D = \angle B$:

المعطيات

المطلوب

المبرهان

$$\because \overline{ED} \parallel \overline{FB}, \text{ فـ } \overline{ED} \text{ قاطع لـ } \overline{AB}$$

$$\therefore \angle D = \angle B \text{ (.....) بالـ (١)}$$

$$\because \overline{ED} \parallel \overline{FB}, \text{ فـ } \overline{ED} \text{ قاطع لـ } \overline{AC}$$

$$\therefore \angle D = \angle B \text{ (.....) بالـ (٢)}$$

$$\therefore AE = AF, \angle D = \angle B \text{ (.....) (٣)}$$

من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن :

$$\therefore \angle D = \angle B \text{ (.....)}$$



أطلب الماهر في الرياضيات

للمرحلة الابتدائية والمرحلة الإعدادية والمرحلة الثانوية

شرح ومراجعة وأهم الأسئلة المتوقعة لامتحان

امتحانات إضافية من السنوات السابقة

تمارين (٣)

على المثلث المتساوي الساقين

أسئلة الوتاة

ساعة امتحان ومراجعة

اختبار
تراكبي
(٢)

أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

١) أكمل ما يأتي :

١) طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي

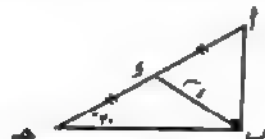
٢) طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30° في المثلث القائم الزاوية يساوي

٣) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًّا منها بنسبة من جهة الرأس

٤) في الشكل المقابل :

محيط $\triangle ABC$

$$= \dots\dots\dots$$



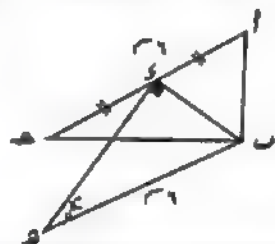
ب) في الشكل المقابل :

\overline{D} متوسط في $\triangle ABC$ ،

$$\overline{DE} \perp \overline{BC}, \angle D = 30^\circ$$

$$AB = 6, BC = 8, \text{ احسب طول } \overline{BD}$$

$$\text{ثم اثبت أن } \angle D = 90^\circ$$



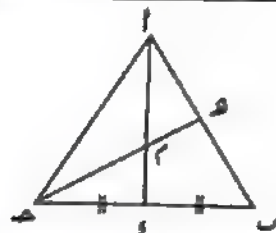
ج) في الشكل المقابل :

$AB = AC$ فيه D منتصف \overline{BC} ،

$$AB = AC, \angle A = 120^\circ$$

$$\angle A = 120^\circ, \text{ احسب } \angle B$$

$$\text{اثبت أن } \angle B = 30^\circ$$



درجات



ثانیاً : اَجِبْ عَمَّا یَأتی :

مسائل المستوى الأول

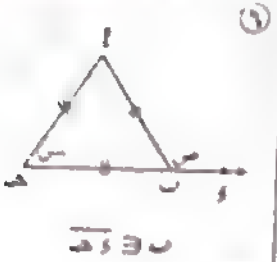
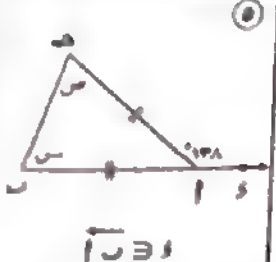
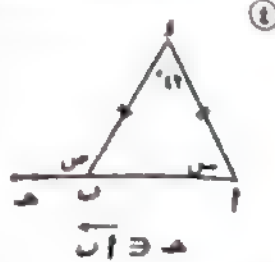
۲) اُکھل ما پاتو :

- ١) رابعتها القاعدة هي المثلث المتساوي الساقين
 ٢) إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاثة
 ٣) في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة ٤٥°
 كان المثلث
 ٤) في ΔABC إذا كان $AB = AC$ ، $\angle A = ١٠٠^\circ$ فإن
 $\angle B = (\dots)^\circ$ ، $\angle C = (\dots)^\circ$
 ٥) إذا كان ABC مثلثاً قائم الزاوية في A ، $AB = AC$ فإن
 $\angle B = (\dots)^\circ$ ، $\angle C = (\dots)^\circ$

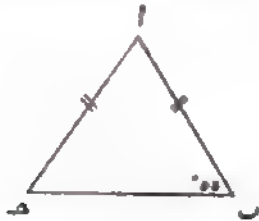
٣) اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

- ① المثلث المتساوي الساقين الذي قياس زاوية رأسه 50° يكون قياس إحدى زاويتي قاعدته = [50° د 40° د 90°]
 ② قياس الزاوية الخارجة من المثلث المتساوي الأضلاع = [30° د 90° د 120° د 60°]
 ③ في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة 65° فإن قياس زاوية رأسه = [65° د 70° د 60° د 50°]
 ④ مجموع قياس زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الأضلاع = [60° د 120° د 180° د 40°]
 ⑤ في Δ من ص ع المتساوي الساقين إذا كان $\overline{س س} \perp \overline{س ع}$ فإن $\angle (س ع) =$ [30° د 60° د 45° د 90°]

١) في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة x ، من :



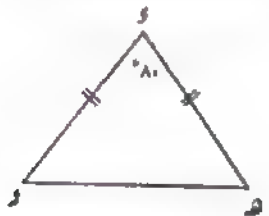
٥ في الشكل المقابل:



Δ فيه
 $\Delta = \Delta$
 $\Delta = (\Delta)$
 Δ ()

[१५०]

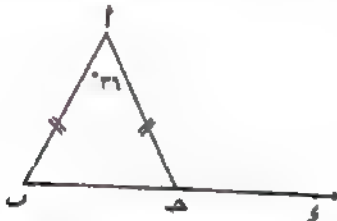
٦ في الشكل المقابل :



و هو Δ فيه
 و $u = v$
 $u = (v)$
 او $u = (v)$

[24]

٧ في الشكل المقابل :

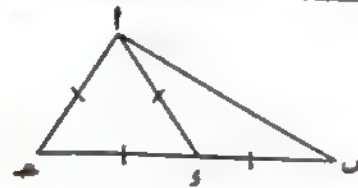


Δ فيه $a = 1$ ،
 $\exists b \in \mathbb{N}$ ، $(1, b) \in \Delta$
 أوجد : $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

[٧٤]

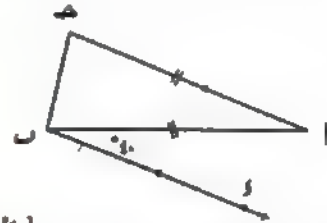


٧ في الشكل المقابل :



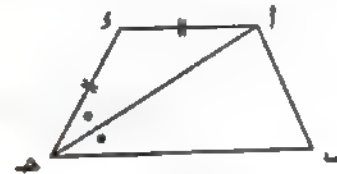
أ ب ح فيه
د منتصف ب ح ،
ا د = د ع = ح د
اثبت أن : $\angle (د ا ب) = 90^\circ$

٨ في الشكل المقابل :



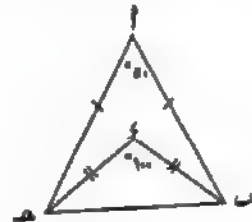
ا د // ب ح ، ا ب = ا ح ،
 $\angle (د ا ب) = 40^\circ$
أوجد : قياسات زوايا $\triangle ا ب ح$

٩ في الشكل المقابل :



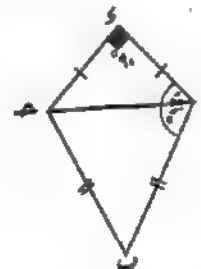
أ ب ح شكل رباعي فيه
ا د = ح د ، ح د // ا ب ح
اثبت أن : $\overline{ا د} \parallel \overline{ب ح}$

١٠ في الشكل المقابل :



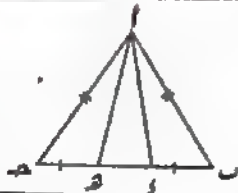
ا ب = ا ح ، د ب = د ح ،
 $\angle (د ا ب) = 100^\circ$ ، $\angle (د ب ح) = 30^\circ$
أوجد : ١) $\angle (د ا ب ح)$
٢) $\angle (د ا ب د)$

١١ في الشكل المقابل :



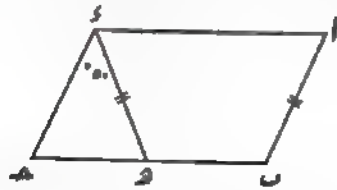
ا د = ح د ، ا ب = ح ب ،
 $\angle (د ا ب) = 120^\circ$ ،
 $\angle (د ب ح) = 90^\circ$
أوجد : $\angle (د ا ب ح)$

١٢ في الشكل المقابل :



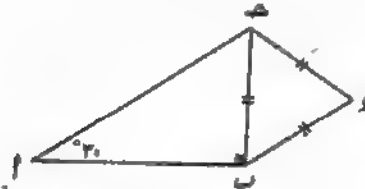
ا ب ح فيه ا ب = ا ح ،
و د // ب ح بحيث د = ح د ،
اثبت أن : $\triangle ا د ح$ متساوي الساقين

١٣ في الشكل المقابل :



ا ب ح متوازي أضلاع
ا ب = ح د ، $\angle (د ب ح) = 50^\circ$
أوجد $\angle (د ا ب)$

١٤ في الشكل المقابل :

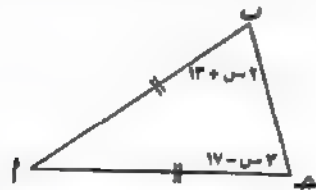


ا ب ح قائم الزاوية في ب ،
 $\angle (د ا ب) = 30^\circ$ ، ب ح = ح د = د ب
١) أوجد $\angle (د ا ب ح)$
٢) اثبت أن $\overline{د ب} \parallel \overline{ا ح}$

١٥ ا ب ح فيه $\angle (د ا ب) = 50^\circ$ ، ا ب = ا ح ، رسم ب ح ينصف د ب ،

ورسم ح د ينصف د ب بحيث $\overline{د ب} \cap \overline{ح د} = \{د\}$ أوجد : $\angle (د ا ب ح)$ [١١٥]

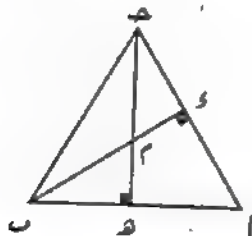
١٦ في الشكل المقابل :



ا ب = ا ح ، $\angle (د ا ب) = 13^\circ + 2^\circ$ ،
 $\angle (د ب ح) = 3^\circ - 17^\circ$
أوجد : قياسات زوايا $\triangle ا ب ح$

مسائل التفوق

١٧ في الشكل المقابل :



ا ب = ا ح ، $\overline{ب ح} \perp \overline{ا ح}$ ،
 $\overline{ح د} \perp \overline{ا ب}$ ، $\overline{ح د} \cap \overline{ب ح} = \{ح\}$
اثبت أن : ب د = ح د



المعطيات: $\triangle ABC$ متساوي الساقين، $\angle A = 136^\circ$ ، $\angle B = 18^\circ$ ، $\angle C = 18^\circ$

المطلوب: $\triangle ABC$ متساوي الساقين

البرهان: $\triangle ABC$ متساوي الساقين

$\therefore \angle B = \angle C = 18^\circ$ (مكمل زاوية $\angle A$)

\therefore مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC = 180^\circ$

$\therefore \angle B = \angle C = 18^\circ$ (بما أن $\angle A = 136^\circ$)

$\therefore \angle B = \angle C$

$\therefore \triangle ABC$ متساوي الساقين

#



في الشكل المقابل:

$\triangle ABC$ فيه $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

بحيث $\angle A = \angle D$ ، $\angle B = \angle C$

أثبت أن: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

بكم الحل

المعطيات: $\angle A = \angle D$ ، $\angle B = \angle C$

المطلوب: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

البرهان: $\angle A = \angle D$

(1) $\angle A = \angle D$ (بما أن $\angle A = \angle D$)

$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (بما أن $\angle A = \angle D$)

(2) $\angle B = \angle C$ (بما أن $\angle B = \angle C$)

(3) $\angle B = \angle C$ (بما أن $\angle B = \angle C$)

من (1)، (2)، (3) ينتج أن: $\angle A = \angle D$

$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$

#



في الشكل المقابل:



$\triangle ABC$ فيه \overline{AD} ، \overline{BE} متساوي الساقين، $\angle A = 128^\circ$

\overline{AD} ينصف \overline{BC} ، \overline{BE} ينصف \overline{AC}

أثبت أن: $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ ، $\angle A = 128^\circ$

بكم الحل

المعطيات: $\angle A = 128^\circ$

المطلوب: $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$

البرهان: $\angle A = 128^\circ$

$\therefore \angle A = 128^\circ$ (بما أن $\angle A = 128^\circ$)

$\therefore \angle A = 128^\circ$ (بما أن $\angle A = 128^\circ$)

$\therefore \angle A = 128^\circ$ (بما أن $\angle A = 128^\circ$)

$\therefore \angle A = 128^\circ$ (بما أن $\angle A = 128^\circ$)

$\therefore \angle A = 128^\circ$ (بما أن $\angle A = 128^\circ$)

$\therefore \angle A = 128^\circ$ (بما أن $\angle A = 128^\circ$)

$\therefore \angle A = 128^\circ$ (بما أن $\angle A = 128^\circ$)

$\therefore \angle A = 128^\circ$ (بما أن $\angle A = 128^\circ$)

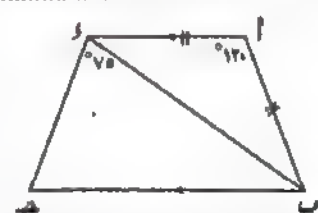
$\therefore \angle A = 128^\circ$ (بما أن $\angle A = 128^\circ$)

$\therefore \angle A = 128^\circ$ (بما أن $\angle A = 128^\circ$)

#



في الشكل المقابل:



$\triangle ABC$ فيه \overline{AD} ، \overline{BE} متساوي الساقين، $\angle A = 120^\circ$

\overline{AD} ينصف \overline{BC} ، \overline{BE} ينصف \overline{AC}

أثبت أن: $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$

بكم الحل



المهمة في النماذج

المعطيات: $AB = AC$ ، $\angle A = 120^\circ$ ، $\angle B = \angle C$ ، $\angle D = 70^\circ$

المطلوب: $BD = CD$

البرهان

$$\angle A = 120^\circ \Rightarrow \angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

$\angle A \parallel \angle D$ ، $\angle B \parallel \angle C$ قاطعتهما

$$\angle B = \angle C = 30^\circ \text{ بالتبادل}$$

مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC = 180^\circ$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow 120^\circ + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\angle D = 70^\circ = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$$

$$\angle D = 70^\circ = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$$

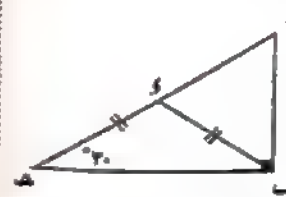
$$\angle D = 70^\circ = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$$

$$\angle D = 70^\circ = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$$

#



في الشكل المقابل:



أ. م. مثلث قائم الزاوية في ب، $\angle A = 30^\circ$ ، $\angle B = 40^\circ$ ، $\angle C = 90^\circ$
اثبت أن: ① $AB \parallel AC$ ومتساوي الأضلاع
② $\angle A = \frac{1}{2} \angle B$

كل الحل

$$\angle A = 30^\circ = \frac{1}{2} \angle B = 60^\circ$$

$$\angle A = 30^\circ = \frac{1}{2} \angle B = 60^\circ$$

$$\angle A = 30^\circ = \frac{1}{2} \angle B = 60^\circ$$

$$\angle A = 30^\circ = \frac{1}{2} \angle B = 60^\circ$$

$$\angle A = 30^\circ = \frac{1}{2} \angle B = 60^\circ$$

$$\angle A = 30^\circ = \frac{1}{2} \angle B = 60^\circ$$

المعطيات

المطلوب

البرهان

في $\triangle ABC$ ، $\angle A = 30^\circ$ ، $\angle B = 40^\circ$

$\angle C = 90^\circ$

$\angle A = 30^\circ = \frac{1}{2} \angle B = 60^\circ$

$\angle A = 30^\circ = \frac{1}{2} \angle B = 60^\circ$

طريقة المثلث المتساوي القائم

$\angle A = 120^\circ$ خارجة عن $\triangle ABC$

$$\angle A = 120^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية $= 180^\circ$

$$\angle A = 120^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

$$\angle A = 120^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

$$\angle A = 120^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

$\triangle ABC$ متساوي الأضلاع

$$\angle A = 120^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

$$\angle A = 120^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

$$\angle A = 120^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

#



تدريب (١)

في الشكل المقابل:

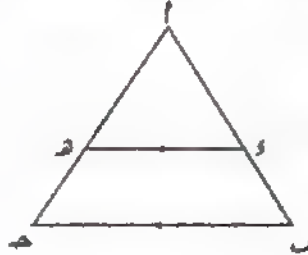
$\triangle ABC$ فيه $AB = AC$ ، $\angle A = 120^\circ$

أكمل ما يأتي لإثبات أن $\triangle ABC$ متساوي الساقين

المعطيات

المطلوب

البرهان



$$\angle A = 120^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

$$\angle A = 120^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

$$\angle A = 120^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

$$\angle A = 120^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن:

$$\angle A = 120^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

$$\angle A = 120^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$



تدريب (٢)

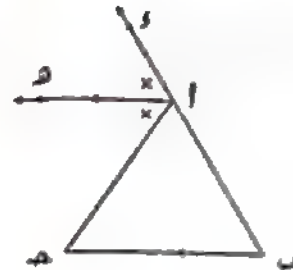
في الشكل المقابل :

أ ب هـ مثلث ، و \exists د ب أ

بحيث $\angle (د هـ أ) = 110^\circ$

أ د ينصف (د هـ أ) ،

أ د // ب هـ



أكمل ما يأتي لإثبات أن $AB = AE$

المعطيات

المطلوب

البرهان

$\because \angle (د هـ أ) = 110^\circ$ ، أ د ينصف د هـ أ

$\therefore \angle (د هـ أ) = \angle (د هـ أ) = 110^\circ$

\because أ د // ب هـ ، أ د قاطع لهما

$\therefore \angle (د هـ أ) = \angle (د هـ أ) = 110^\circ$ (١)

\because أ د // ب هـ ، أ د قاطع لهما

$\therefore \angle (د هـ أ) = \angle (د هـ أ) = 110^\circ$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$\therefore \angle (د هـ أ) = \angle (د هـ أ) = 110^\circ$

اطلب الماهر في الرياضيات

للمرحلة الابتدائية والمرحلة الإعدادية والمرحلة الثانوية
شرح ومراجعة وأهم الأسئلة المتوقعة للامتحان
امتحانات إضافية من السنوات السابقة



تمارين (٤)

على عكس نظرية المثلث المتساوي الساقين

ساعة امتحان ومراجعة

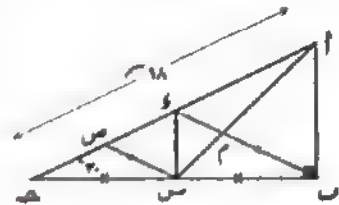
أولاً : راجع معنا واختبر نفسك

١) أكمل ما يأتي :

التمرين (٢)

- ١) طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي
- ٢) قياس كل زاوية في المثلث المتساوي الأضلاع تساوي
- ٣) إذا كان أ ب هـ مثلث قائم الزاوية في أ ، أ ب = أ هـ فإن $\angle (د ب هـ) = \dots\dots\dots$
- ٤) في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس زاوية الرأس 40° فإن قياس إحدى زاويتي القاعدة $\dots\dots\dots$

(ب) في الشكل المقابل :



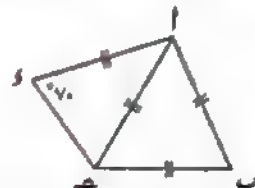
إذا كان أ ب هـ Δ قائم في هـ
و $\angle (د ب هـ) = 90^\circ$ ، ومنتصف أ هـ ،
س منتصف ب هـ ، س منتصف د هـ ،
و $\angle (د هـ أ) = 30^\circ$ ، $\angle (د هـ ب) = 60^\circ$ ،
أ س = ب س ، أ س // ب هـ ،
فأكمل ما يأتي :

ب د = ، ب د // ،

س د = ، س د // ،

و $\angle (د س ب) = \dots\dots\dots$ ، محيط الشكل س د هـ = ،

(ج) في الشكل المقابل :



أ ب = ب د = د هـ = أ هـ ،
و $\angle (د ب هـ) = 70^\circ$ ،
أوجد : ١) $\angle (د ب هـ)$ ،
٢) $\angle (د ب هـ)$



2

1



1

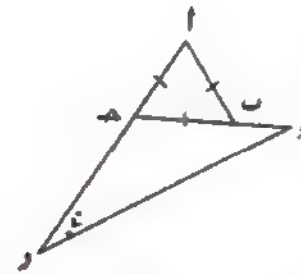
1

0



مسائل المستوى الثاني

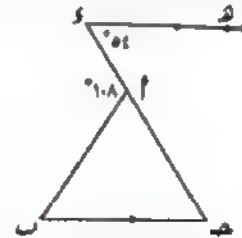
٧) في الشكل المقابل :



أ ب ه مثلث متساوي الأضلاع
 $\angle ADE = 30^\circ$
 $\angle ADE = 30^\circ$

أثبت أن : $\triangle ADE$ متساوي الساقين

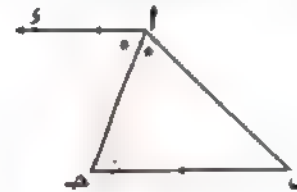
٨) في الشكل المقابل :



$\angle ADE = 108^\circ$
 $\angle ADE = 108^\circ$

أثبت أن : $\triangle ADE$ متساوي الساقين

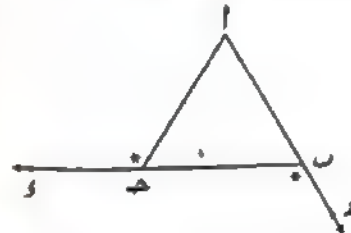
٩) في الشكل المقابل :



$\angle ADE = 108^\circ$
 $\angle ADE = 108^\circ$

أثبت أن : $\triangle ADE$ متساوي الساقين

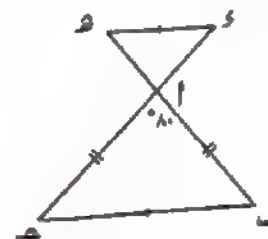
١٠) في الشكل المقابل :



$\angle ADE = 120^\circ$
 $\angle ADE = 120^\circ$

فأثبت أن : $\triangle ADE$ متساوي الأضلاع

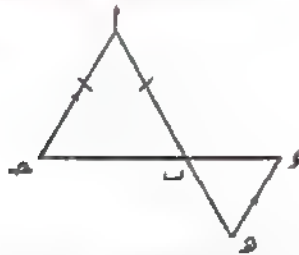
١١) في الشكل المقابل :



$\angle ADE = 80^\circ$
 $\angle ADE = 80^\circ$

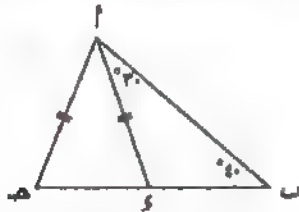
ثم برهن أن : $\triangle ADE$ متساوي الساقين

١٢) في الشكل المقابل :



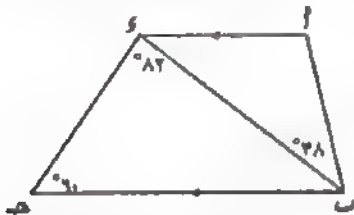
$\angle ADE = 40^\circ$
 $\angle ADE = 40^\circ$

١٣) في الشكل المقابل :



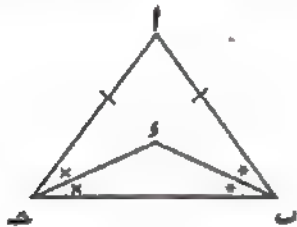
$\angle ADE = 40^\circ$
 $\angle ADE = 40^\circ$

١٤) في الشكل المقابل :



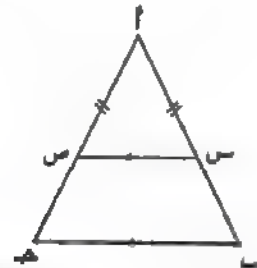
$\angle ADE = 82^\circ$
 $\angle ADE = 82^\circ$

١٥) في الشكل المقابل :



$\angle ADE = 38^\circ$
 $\angle ADE = 38^\circ$

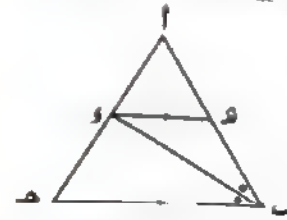
١٦) في الشكل المقابل :



$\angle ADE = 30^\circ$
 $\angle ADE = 30^\circ$



١٧ في الشكل المقابل :



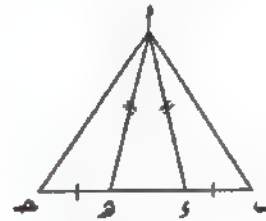
\overline{DE} ينصف ΔABC ، ويقطع \overline{AD} في D
 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ حيث $D \in \overline{AB}$
 أثبت أن ΔABC متساوي الساقين

١٨ في الشكل المقابل :



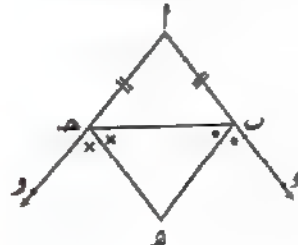
ΔABC مثلث فيه $D \in \overline{AB}$ ،
 $E \in \overline{AC}$ ، ونقطة داخل المثلث
 بحيث $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ، $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$
 أثبت أن $DE = DE$

١٩ في الشكل المقابل :



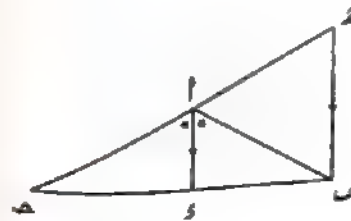
ΔABC فيه $D \in \overline{AB}$ ،
 $E \in \overline{AC}$ ، $D = E$
 أثبت أن $AB = AC$

٢٠ في الشكل المقابل :



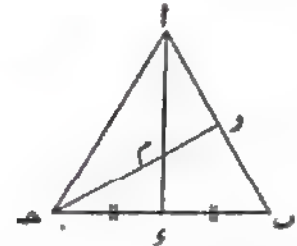
$AB = AC$ ، $D \in \overline{AB}$ ، $E \in \overline{AC}$ ،
 \overline{DE} ينصف ΔABC ،
 \overline{DE} ينصف ΔABC
 أثبت أن $DE = DE$

٢١ في الشكل المقابل :



$D \in \overline{AB}$ ، $E \in \overline{AC}$ ، $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
 أثبت أن ΔABC متساوي الساقين
 وإذا كان $\angle C = 90^\circ$
 أثبت أن ΔABC متساوي الأضلاع

٢٢ في الشكل المقابل :

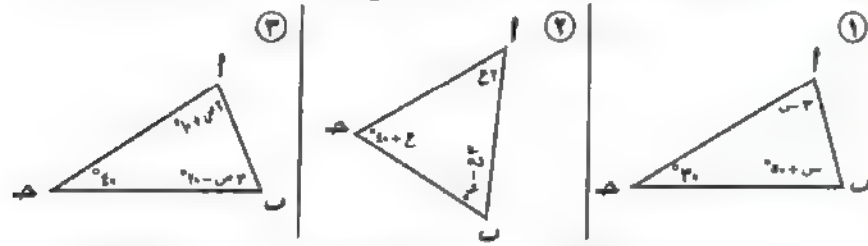


ΔABC مثلث فيه $D \in \overline{AB}$ ،
 $E \in \overline{AC}$ ، $D = E$
 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
 $\{D\} = \{E\}$
 أثبت أن $D = E$

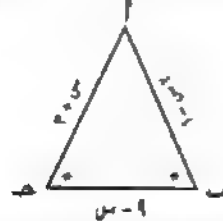
٢٣ ΔABC وشكل رباعي فيه $\angle A = 90^\circ$ ، $D \in \overline{AB}$ ، $E \in \overline{AC}$ ، $D = E$

أثبت أن $AB = AC$

٢٤ في كل من الأشكال الآتية اكتب أضلاع المثلث المتساوية في الطول :



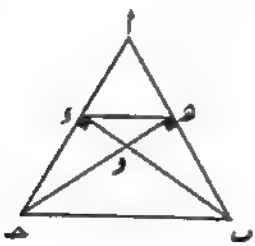
٢٥ في الشكل المقابل :



ΔABC مثلث فيه
 $D \in \overline{AB}$ ، $E \in \overline{AC}$ ،
 أوجد محيط المثلث

مسائل المتفوقين

٢٦ في الشكل المقابل :



$D \in \overline{AB}$ ، $E \in \overline{AC}$ ، $D = E$
 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
 $\{D\} = \{E\}$
 أثبت أن $D = E$



نتائج على نظريات المثلث المتساوي الساقين

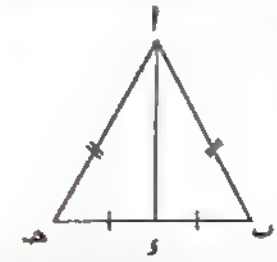
• للمثلث المتساوي الساقين عدة نتائج هامة تتلخص فيما يلي :

نتيجة

متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة

فمثلاً : إذا كان AB مثلث فيه $AB = AC$ ، D متوسط BC فإن :

- ① AD ينصف زاوية الرأس $\angle BAC$
- ② $AD \perp BC$

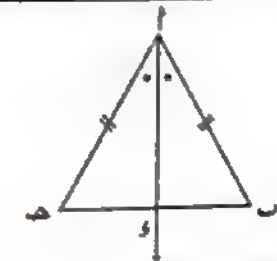


نتيجة

منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها

فمثلاً : إذا كان AB مثلث فيه $AB = AC$ ، AD ينصف $\angle BAC$ فإن :

- ① D منتصف BC أي $BD = DC$
- ② $AD \perp BC$

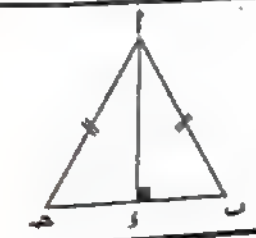


نتيجة

المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلا من القاعدة وزاوية الرأس

فمثلاً : إذا كان AB مثلث فيه $AB = AC$ ، $AD \perp BC$ فإن :

- ① D منتصف BC أي $BD = DC$
- ② $\angle BAD = \angle CAD$ و $\angle B = \angle C$



ومما سبق يمكن إدراك أن المثلث المتساوي الساقين به ثلاث معلومات هامة إذا أعطيت إحداها نستنتج الآخرين كما يلي :

في المثلث
المتساوي
الساقين



- متوسط من رأس Δ \rightarrow نستنتج أنه عمودي على القاعدة
- منصف زاوية الرأس \rightarrow نستنتج أنه عمودي على القاعدة
- مستقيم من رأس Δ عمودي على القاعدة \rightarrow نستنتج أنه ينصف زاوية الرأس

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عمودياً على قاعدته

نغني الشكل المقابل :

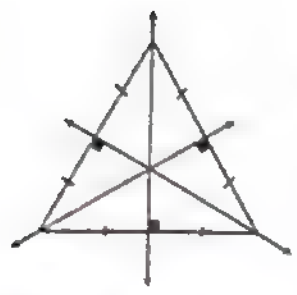
إذا كان AB مثلث فيه $AB = AC$ ، $AD \perp BC$ فإن AD يسمى محور تماثل المثلث AB .
لاحظ أن محور تماثل المثلث المتساوي الساقين :

- ① ينصف القاعدة
- ② ينصف زاوية الرأس
- ③ عمودي على القاعدة



ملاحظة

- المثلث المتساوي الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل حيث يمر محور التماثل بأحد رؤوس المثلث عمودياً على القاعدة المقابلة لهذه الرأس من منتصفها كما بالشكل
- المثلث المختلف الأضلاع ليس له محاور تماثل





محور تماثل القطعة المستقيمة

يسمى المستقيم العمودي على قطعة مستقيمة من منتصفها محور تماثل لهذه القطعة المستقيمة وللأختصار يسمى محور القطعة المستقيمة

نفي الشكل المقابل :

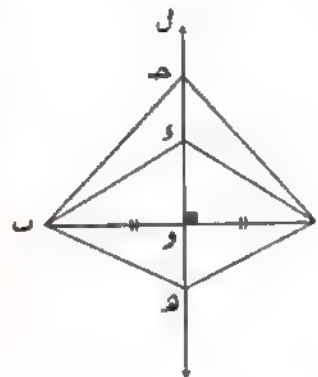


إذا كانت l منتصف AB
المستقيم $l \perp AB$ ماراً بنقطة H
فإن المستقيم l هو محور AB

خاصية هامة

أي نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها

نمثلاً : إذا كان المستقيم l محور AB

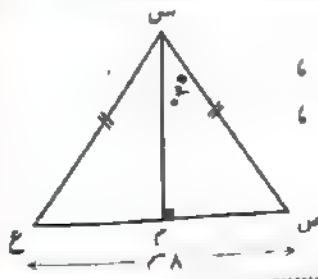


وكانت $H \in l$ فإن $AH = BH$
وإذا كانت $H \in l$ فإن $CH = DH$
والعكس صحيح أي أنه :

إذا كانت AB قطعة مستقيمة و H نقطة
بحيث $AH = BH$ فإن H تقع على محور AB
أي أنه إذا كانت نقطة على بعدين متساويين
من طرفي قطعة مستقيمة فإن هذه النقطة
تقع على محور هذه القطعة المستقيمة

أمثلة توضيحية

في الشكل المقابل :



س AB Δ فيه $AB = AC$ ،
س $M \perp BC$ ، H (ن AB س M) 90° ،
س $AB = AC$

أوجد : ① l (AB س C)
② طول AM

بم الحل

المعطيات

س $AB = AC$ ، س $M \perp BC$ ، H (ن AB س M) 90° ،
س $AB = AC$

المطلوب

ن (AB س C) ، طول AM

البرهان

في Δ س AB س C

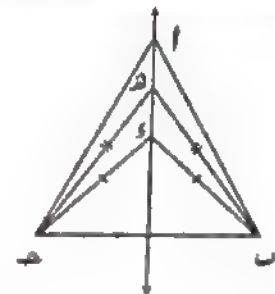
س $AB = AC$ ، س $M \perp BC$ ، H

س M ينصف القاعدة BC وينصف زاوية الرأس A س C

س AB س C (AB س C) 90° ، ① #

س $AB = AC$ ، س $M \perp BC$ ، H ، ② #

في الشكل المقابل :



س $AB = AC$ ،

س $AB = AC$ ،

س $AB = AC$ ،

أثبت أن : $AB = AC$

بم الحل

المعطيات

س $AB = AC$ ، س $AB = AC$ ،

المطلوب

س $AB = AC$ ،

البرهان

س $AB = AC$ ،

س $AB = AC$ ،

س $AB = AC$ ،

س $AB = AC$ ،

س $AB = AC$ ،

في الشكل المقابل:



أ ب هـ وشكل رباعي فيه
 $\{ د \} = \overline{AB} \cap \overline{CD}$
 بحيث $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ، $\angle ADE = 30^\circ$
 $\angle BDE = 30^\circ$ ، $\angle ABE = 30^\circ$
 أوجد : ① $\angle CBE$ ، ② طول كل من \overline{AD} ، \overline{BC}

والحل

أ ب هـ ، $\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle BDE = 30^\circ$ ، $\angle ABE = 30^\circ$ ، $\angle CBE = 30^\circ$

① $\angle CBE = 30^\circ$ ، طول كل من \overline{AD} ، \overline{BC}

في $\triangle ADE$:

$\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 90^\circ$

$\therefore \overline{DE}$ ينصف \overline{AB} ، \overline{DE} منتصف \overline{AB}

$\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 90^\circ$ ، $\angle ABE = 30^\circ$ ، $\angle CBE = 30^\circ$

في $\triangle ABE$:

$\angle ABE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 90^\circ$ ، $\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle BDE = 30^\circ$

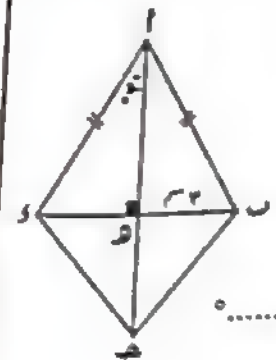
$\therefore \overline{DE}$ ينصف \overline{AB} ، \overline{DE} منتصف \overline{AB}

$\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 90^\circ$ ، $\angle ABE = 30^\circ$ ، $\angle CBE = 30^\circ$

النتيجة

تدريب (١١)

في الشكل المقابل:



أ ب هـ وشكل رباعي فيه
 $\{ د \} = \overline{AB} \cap \overline{CD}$
 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ، $\angle ADE = 30^\circ$
 $\angle BDE = 30^\circ$ ، $\angle ABE = 30^\circ$
 أوجد ما يأتي:

- ① $\angle CBE$ ، ② طول كل من \overline{AD} ، \overline{BC}
- ③ $\angle ADE$ ، ④ $\angle BDE$ ، ⑤ $\angle ABE$ ، ⑥ $\angle CBE$

تمارين (٥)

على نتائج على نظرية المثلث المتساوي السابق

ساعة استمع ومراجعة

أولاً: راجع معنا واختر نفسك

١) في الشكل المقابل:



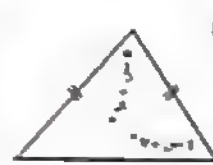
إذا كان $AB = AC$ ، $\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 30^\circ$

بحيث $AD = DE = EC$ ، $\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 30^\circ$

أكمل ما يأتي:

- ① $\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 30^\circ$ ، $\angle ABE = 30^\circ$ ، $\angle CBE = 30^\circ$
- ② $\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 30^\circ$ ، $\angle ABE = 30^\circ$ ، $\angle CBE = 30^\circ$
- ③ $\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 30^\circ$ ، $\angle ABE = 30^\circ$ ، $\angle CBE = 30^\circ$
- ④ $\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 30^\circ$ ، $\angle ABE = 30^\circ$ ، $\angle CBE = 30^\circ$

(ب) في كل مما يأتي أوجد قيمة $\angle A$:

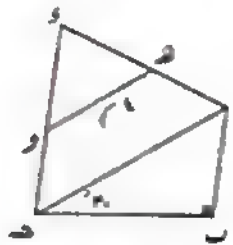


..... = $\angle A$

..... = $\angle A$

..... = $\angle A$

(ج) في الشكل المقابل:



أ ب هـ وشكل رباعي فيه $\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 30^\circ$ ، $\angle ABE = 30^\circ$ ، $\angle CBE = 30^\circ$
 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ، $\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 30^\circ$
 $\angle ABE = 30^\circ$ ، $\angle CBE = 30^\circ$
 أوجد طول \overline{AB}



ثانياً: أجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

٢) أكمل ما يأتي :

- ١) عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الأضلاع هو
- ٢) متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من الرأس
- ٣) محور تماثل القطعة المستقيمة هو
- ٤) أي نقطة على محور تماثل قطعة مستقيمة تكون على
- ٥) منتصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين يكون
- ٦) المستقيم العمودي على القطعة المستقيمة من منتصفها يسمى
- ٧) المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عمودياً على القاعدة يسمى
- ٨) في Δ ABC إذا كان $AB = AC$ ، $\angle A = 60^\circ$ يكون له تماثل
- ٩) في Δ ABC إذا كان $AB = AC$ ، $\angle A = 50^\circ$ فإن له تماثل
- ١٠) إذا كان Δ ABC له محور تماثل واحد ماراً بالرأس A ، $\angle A = 70^\circ$ ، فإن $\angle B = \dots\dots\dots$

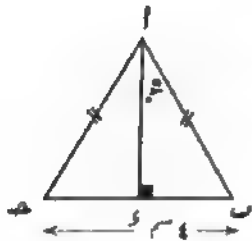
٣) اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

- ١) عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الساقين
[محور واحد أو محوران أو ثلاثة محاور أو أربعة محاور]
- ٢) المثلث المختلف الأضلاع له محاور تماثل
[صفر أو ١ أو ٢ أو ٣]
- ٣) إذا كان AB و CD شكل رباعي فيه $AB = CD$ ، $AD = BC$ ، $AD \parallel BC$ فإن AB CD
[يوازي أو يساوي أو محورتماثل أو يطابق]
- ٤) إذا كان AB و CD محورتماثل AB فإن
[$AB = CD$ أو $AB \parallel CD$ أو $AB \perp CD$ أو $AB = AC$]
- ٥) يسمى المستقيم العمودي على القطعة المستقيمة من منتصفها بها
[عمود أو منتصف أو متوسط أو محورتماثل]



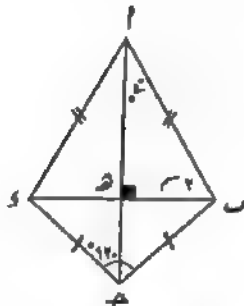
- ٦) إذا كان Δ ABC له محور تماثل واحد وفيه $\angle A = 120^\circ$ فإن $\angle B = \dots\dots\dots$ [30° أو 40° أو 60° أو 120°]
- ٧) المثلث ABC له قائم الزاوية في B ، $\angle A = 55^\circ$ فإن عدد محاور تماثله =
[واحد أو اثنان أو ثلاثة أو صفر]
- ٨) إذا كان ABC له مثلث فيه $\angle A = 45^\circ$ ، $\angle B = 120^\circ$ فإن عدد محاور تماثله =
[واحد أو اثنان أو ثلاثة أو صفر]
- ٩) المثلث الذي أطوال أضلاعه 2 ، $(3 + 3)$ ، 5 يكون متساوي الساقين عندما $3 = \dots\dots\dots$ [1 أو 2 أو 3 أو 4]
- ١٠) إذا كان طول أي ضلع في المثلث $\frac{1}{3}$ محيط هذا المثلث فإن عدد محاور التماثل للمثلث = [صفر أو ١ أو ٢ أو ٣]

٤) في الشكل المقابل :



- ABC في Δ فيه $AB = AC$ ، $AD \perp BC$ ،
 $\angle A = 25^\circ$ ، $\angle B = 40^\circ$ أكمل ما يأتي :
 ١) $\angle ADB = \dots\dots\dots^\circ$ ، $\angle B = \dots\dots\dots^\circ$
 ٢) $\angle ABC = \dots\dots\dots^\circ$ ، $\angle C = \dots\dots\dots^\circ$
 ٣) محاور تماثل Δ ABC هو

٥) في الشكل المقابل :



- $ABCD$ و AC شكل رباعي فيه $AB = AC$ ،
 $AD = BC$ ، $AD \perp BC$ يقطعه في E ،
 $\angle A = 30^\circ$ أكمل ما يأتي :
 ١) $\angle ADB = \dots\dots\dots^\circ$ ، $\angle B = \dots\dots\dots^\circ$
 ٢) $\angle ABC = \dots\dots\dots^\circ$ ، $\angle C = \dots\dots\dots^\circ$
 ٣) $AD = \dots\dots\dots$ ، $BC = \dots\dots\dots$

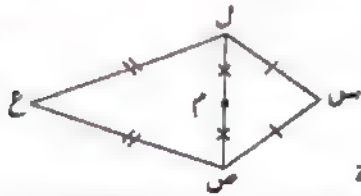
٤) عدد محاور تماثل Δ ABC هو وعدد محاور تماثل Δ ABD هو



١٠ في الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \text{س} \text{ س} &= \text{س} \text{ ل} \\ \text{ع} \text{ س} &= \text{ع} \text{ ل} \\ \text{ل} \text{ م} &= \text{م} \text{ س} \end{aligned}$$

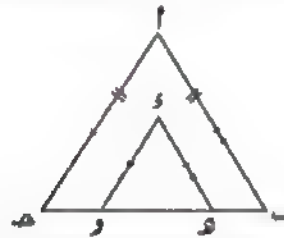
اثبت أن : س ، م ، ع على استقامة واحدة



١١ في الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \text{أ ب} &= \text{أ ح} , \text{و د} \parallel \text{أ ب} \\ \text{و د} &\parallel \text{أ ح} \end{aligned}$$

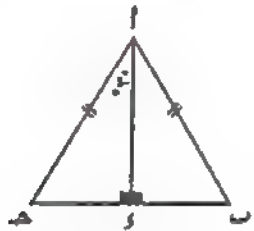
اثبت أن : ١) و د = و ه ٢) و (د ه و) = و (د ه و)



١٢ في الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \text{أ ب ح} \Delta \text{ فيه } \text{أ ب} &= \text{أ ح} , \text{ب ه} = \text{ه د} \\ \text{أ و} \perp \text{ب ه} , \text{و} &= (\text{د ه أ}) = 30^\circ \end{aligned}$$

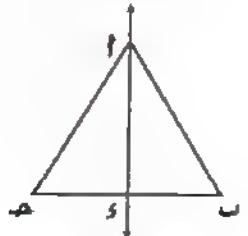
١) أوجد طول ب ه ٢) اثبت أن $\Delta \text{ أ ب ح}$ متساوي الأضلاع



١٣ في الشكل المقابل :

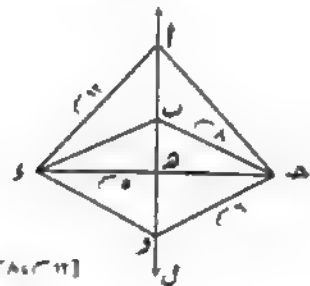
$$\begin{aligned} \text{أ د} &\text{ محور تماثل } \text{ب ه} \\ \text{أ ب} &= \text{أ ح} = \text{ب ه} \end{aligned}$$

احسب : قياسات زوايا $\Delta \text{ أ ب ه}$



١٤ في الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \text{ل} &\text{ محور تماثل } \text{ه و} \\ \text{ه و} &= \text{ه د} , \text{ب ه} = \text{ه د} \\ \text{أ د} &= \text{أ ه} , \text{ه د} = \text{ه د} \\ \text{أ و د} &\text{ طول كلاً من :} \\ \text{أ ه} , \text{ب و} , \text{ه د} , \text{و د} \end{aligned}$$



مسائل المستوى الثاني

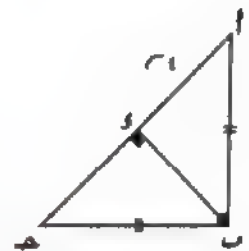
٦ في الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \text{أ ب} &= \text{أ ح} , \text{ب ه} = \text{ه د} \\ \text{و} &= (\text{د ه أ}) = 30^\circ , \text{أ و} \perp \text{ب ه} \\ \text{١) احسب طول ب و} , \text{أ ب} , \text{و} &= (\text{د ه أ}) \\ \text{٢) ما عدد محاور تماثل } \Delta \text{ أ ب ه} &? \end{aligned}$$



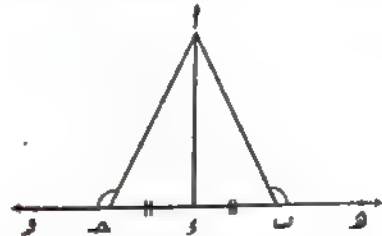
٧ في الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \text{أ ب} &= \text{ب ه} , \text{أ ب} \perp \text{ب ه} \\ \text{ب و} \perp \text{أ ح} , \text{أ د} &= \text{د ه} \\ \text{احسب : طول أ ه} , \text{و} &= (\text{د ه أ}) \\ \text{برهن أن : } \Delta \text{ و ب ه} &\text{ متساوي الساقين} \end{aligned}$$



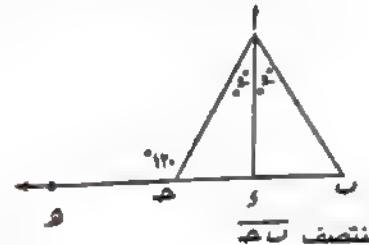
٨ في الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \text{و ب} &= \text{و د} \\ \text{و} &= (\text{د ه أ}) = (\text{د ه و}) \\ \text{اثبت أن : } \text{أ و} &\perp \text{ب ه} \end{aligned}$$



٩ في الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \text{أ ب ح} &\text{ مثلث} \\ \text{و} &= (\text{د ه أ}) = (\text{د ه و}) = 30^\circ \\ \text{ه} &\in \text{ب ه بحيث } \text{و} &= (\text{د ه أ}) = 120^\circ \\ \text{اثبت أن : } \text{أ و} &\perp \text{ب ه} \\ \text{٢) و منتصف ب ه} & \\ \text{٣) ما هو عدد محاور تماثل المثلث أ ب ه} &? \end{aligned}$$





١٥ في الشكل المقابل :

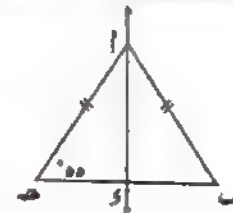
$$AB = AC$$

أو محور تماثل ΔABC ،

$$\angle B = \angle C = 55^\circ$$

أوجد : $\angle A$ و $\angle B$ و $\angle C$

[٣٥]

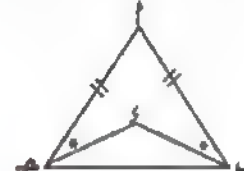


١٦ في الشكل المقابل :

$$AB = AC$$

$$\angle B = \angle C = 55^\circ$$

أثبت أن : \overline{AO} محور تماثل

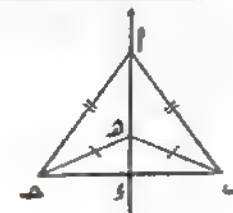


١٧ في الشكل المقابل :

$$AB = AC$$

$$\angle B = \angle C = 55^\circ$$

أثبت أن : $\overline{AO} \perp \overline{BC}$



١٨ في الشكل المقابل :

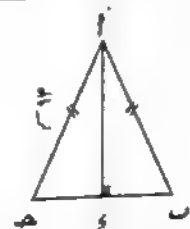
$$AB = AC$$

$$\angle B = \angle C = 55^\circ$$

أوجد طول \overline{AO} ،

أوجد مساحة ΔABC

[٣٥، ٣٦]



١٩ ΔABC متطابق الساقين ، رسم محور التماثل المستقيم l يمر بالرأس A

فإذا كان $l \cap \overline{BC} = \{O\}$ ، $\angle B = \angle C$ ، $\overline{AO} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{AB} = \overline{AC}$

أثبت أن : ΔABC متطابق الساقين ثم أثبت أن : $\angle B = \angle C$

مسائل التفوق

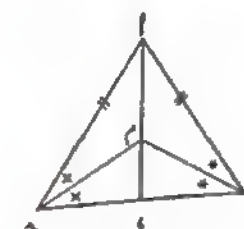


٢٠ في الشكل المقابل :

$$AB = AC$$

$$\angle B = \angle C = 55^\circ$$

أثبت أن : $\overline{AO} \perp \overline{BC}$



اختبارات (٣)

اختبارات مراجعة على ما سبق

نموذج (١)

٣٠

اختبار مراجعة على ما سبق

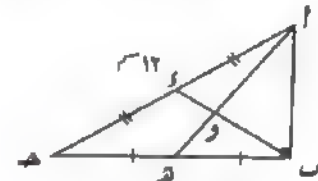
١ أكمل ما يأتي :

١ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة من جهة القاعدة

٢ متوسط المثلث هو

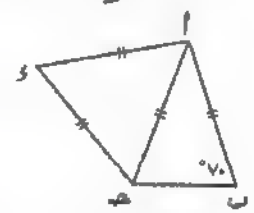
٣ في الشكل المقابل :

$$\angle B = \angle C = 55^\circ$$



٤ في الشكل المقابل :

$$\angle B = \angle C = 55^\circ$$



٢ في الشكل المقابل :

$$\angle B = \angle C = 55^\circ$$

$$\angle B = \angle C = 55^\circ$$

$$\angle B = \angle C = 55^\circ$$

$$\angle B = \angle C = 55^\circ$$

أوجد بالبرهان محيط ΔABC



٣ ΔABC مثلث متساوي الساقين فيه $AB = AC$ ،

$$\angle B = \angle C = 55^\circ$$

أوجد $\angle A$ و $\angle B$ و $\angle C$ ، $\overline{AO} \perp \overline{BC}$ ، \overline{AO} يقطعها في O ، $\angle B = \angle C = 55^\circ$

أوجد $\angle A$ و $\angle B$ و $\angle C$ ، طول \overline{AO}



التباين

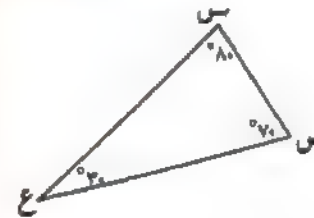
الوحدة الخامسة

تسمى كل من $<$ ، $>$ علامة التباين وتسمى "أ ب < هـ" متباينة أو علاقة تباين وهي تستخدم للمقارنة بين الأطوال والقياسات المختلفة
فمثلاً في Δ أ ب هـ :



إذا كان أ ب = 3 ، ب هـ = 6 ، أ هـ = 5
فإننا نستنتج أن طول ب هـ أكبر من طول أ هـ
ونكتب ب هـ < أ هـ وأيضا نستنتج أن أ ب < أ هـ
أي أن ب هـ < أ هـ < أ ب

وأيضا في Δ س ع :



إذا كان ق (د س) = 70° ،
ق (د س) = 80° ، ق (د ع) = 30°
فإننا نستنتج أن ق (د س) < ق (د ع) ،
ق (د س) < ق (د ع) ، ق (د ع) < ق (د س) ،
أي أن ق (د س) < ق (د ع) < ق (د س)

وعلاقة التباين مسلمات تسمى مسلمات التباين سوف نعرضها فيما يلي :

مسلمات علاقة التباين

بفرض أن س ، ع ، أ ، ب أعداد :

- ① إذا كان س < ع فإن س + ع < ع + ع
- ② إذا كان س < ع فإن س - ع < ع - ع
- ③ إذا كان س < ع وكان ع عدداً موجباً فإن س ع < ع ع
- ④ إذا كان س < ع ، ع < ع فإن س ع < ع ع
- ⑤ إذا كان س < ع ، أ < ب فإن س + أ < ع + ب

و يمكننا التأكد من المسلمات السابقة بوضع أعداد بدلاً من الرموز
فمثلاً بفرض أن س = 10 ، ع = 6 ، ع = 2 يمكن التأكد من صحة المسلمات

تذكر أن

قياس أي زاوية خارجة للمثلث أكبر من قياس أي زاوية داخلية ما عدا المجاورة لها

أمثلة توضيحية

في الشكل المقابل :

ب \exists أ ، هـ \exists أ
بحيث أ هـ < ب هـ
أثبت أن : أ ب < هـ



الحل

المعطيات : أ هـ < ب هـ

المطلوب : أ ب < هـ

البرهان : أ هـ < ب هـ ، ب هـ مشتركة في كل منهما

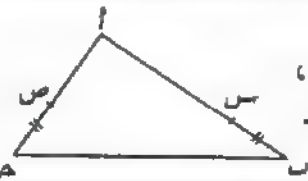
بطرح طول ب هـ من كل منهما

\therefore أ هـ - ب هـ < ب هـ - ب هـ

\therefore أ ب < هـ

في الشكل المقابل :

أ ب هـ Δ فيه أ ب < أ هـ ، أ هـ < س هـ ،
س \exists أ هـ بحيث س ب = س هـ
أثبت أن : أ س < أ هـ



الحل

المعطيات : أ ب < أ هـ ، س ب = س هـ

المطلوب : أ س < أ هـ

البرهان : أ ب < أ هـ

(1)

(2)

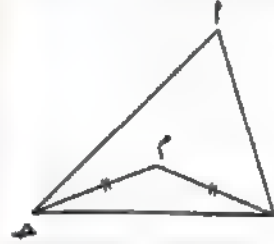
بطرح (2) من (1)

\therefore أ ب - س ب < أ هـ - س هـ

\therefore أ س < أ هـ



في الشكل المقابل :



أ ب هـ فيه ،
 $\angle (أ ب هـ) < \angle (أ ب د)$ ،
 $\angle م = \angle م$
 أثبت أن : $\angle (أ ب م) < \angle (أ ب د)$

بكم الحل

المعطيات : $\angle (أ ب هـ) < \angle (أ ب د)$ ،

$\angle م = \angle م$

المطلوب : $\angle (أ ب م) < \angle (أ ب د)$

البرهان : $\angle م = \angle م$

$\therefore \angle (أ ب م) = \angle (أ ب د)$ (١)

$\therefore \angle (أ ب هـ) < \angle (أ ب د)$ (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح :

$\angle (أ ب هـ) - \angle (أ ب م) < \angle (أ ب د) - \angle (أ ب م)$

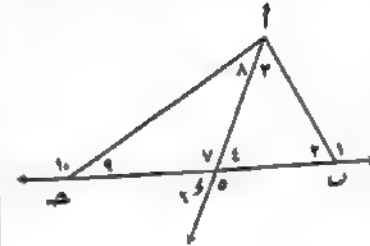
$\therefore \angle (أ ب هـ) < \angle (أ ب د)$ #



أشكال للتدريب

تدريب (١)

في الشكل المقابل :



أ ب هـ مثلث ، $\overrightarrow{أ ب هـ} \parallel \overrightarrow{أ ب د}$ ، $\{و\}$

ضم دائرة حول الزاوية

التي لها أكبر قياس

في كل مما يأتي :

① ٤٣ ، ٣٢ ، ١٤ ② ٤٤ ، ٨٢ ، ٩٢

③ ٢٢ ، ٣٢ ، ٧٢ ④ ٧٢ ، ٨٢ ، ١٢



تمارين (٦)

على مسلمات التباين

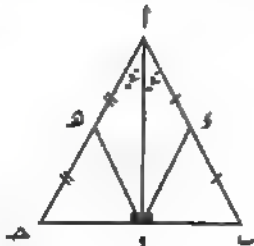
أهلة الزاوية

أولاً : راجع معنا واختبر نفسك

١) أكمل ما يأتي :

- نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة
- عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الأضلاع يساوي
- إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوي الساقين يساوي ٦٠° كان المثلث
- في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة ٦٥° فإن قياس زاوية رأسه =°

ب) في الشكل المقابل :



أ ب هـ فيه ، و منتصف

أ ب ، أ هـ على الترتيب ،

أو \perp ب هـ ، و و هـ = هـ = هـ فإن :

أ ب = ، أ هـ = ،

ب و = ، و هـ = ،

محيط Δ أ ب هـ =

ج) في الشكل المقابل :



و \exists ب هـ بحيث

أ ب = ب و = و هـ ،

$\angle (أ ب هـ) = ٣٠^\circ$

أثبت أن ① أ ب و متساوي الأضلاع

② أ ب هـ قائم الزاوية

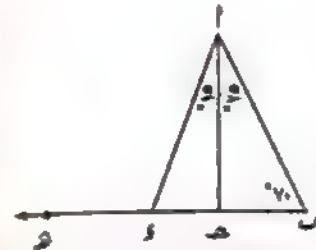
٣ درجات



ثانياً: اجب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

٢) فو الشكل المقابل:



أوجد \angle (أ ب د)، \angle (د أ ب)، \angle (د ب د)

ثم أكمل باستخدام $<$ أو $>$:

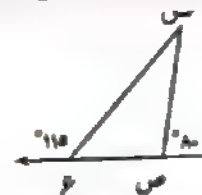
١) \angle (أ ب د) \angle (د أ ب)

٢) \angle (أ ب د) \angle (د أ ب)

٣) \angle (أ ب د) \angle (د أ ب)

٤) \angle (أ ب د) \angle (د أ ب)

٣) رتب زوايا المثلث أ ب د تصاعدياً وقياسات زوايا Δ س م ع تنازلياً:



٢)



١)

\angle (أ ب د) \angle (ب أ د) \angle (د أ ب) \angle (س م ع) \angle (م س ع) \angle (ع م س)

٤) (١) أ ب د ه و أربع نقط على استقامة واحدة على الترتيب

فأكمل بوضع علامة $<$ أو $>$ في كل مما يأتي:

١) إذا كان أ ب = ٣ سم ، ه د = ٤ سم ، ب ه = ٢ سم

فإن أ ه ب و

٢) إذا كان أ ب = ٥ سم ، ه د = ٦ سم ، ب ه = ٣ سم

فإن أ ب - ب ه ه د - ب ه

(ب) أكمل ما يأتي:

١) إذا كان س م = ل م فإن $\frac{1}{4}$ س م $\frac{1}{4}$ ل م

٢) إذا كان \angle (أ ب د) = ٦٠° ، \angle (ب أ د) = ٤٠° ، \angle (د أ ب) = ١٠°

فإن \angle (أ ب د) + \angle (ب أ د) \angle (د أ ب) + \angle (ب أ د)

٣) إذا كان \angle (أ ب د) < \angle (ب أ د) فإن مكملة د أ مكملة ب د

٥) اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس:

١) إذا كان أ ب ، ه د أعداد موجبة وكان أ < ب فإن أ + ه ب + ه

[$<$ ، $>$ ، $=$ ، \neq]

٢) إذا كان أ ب عددين موجبين ه عند سالب وكان أ < ب فإن أ + ه ب + ه

[$<$ ، $>$ ، $=$ ، \neq]

٣) إذا كان س م ، ن عددين موجبين حيث س < م وكان ع عند سالب فإن

س م م ن ع [$<$ ، $>$ ، $=$ ، \neq]

٤) إذا كان أ ب ، ه د ثلاث أعداد موجبة وكان أ < ب ، ب < ه فإن أ ه

[$<$ ، $>$ ، $=$ ، \neq]

٥) إذا كان م ، ل \exists س م بحيث م < س ل فإن س م ل م

[$<$ ، $>$ ، $=$ ، \neq]

٦) إذا كان ب و ينصف د أ ه فإن \angle (أ ب د) \angle (ب أ د)

[$<$ ، $>$ ، $=$ ، \neq]

مسائل المستوى الثاني

٦) فو الشكل المقابل:



أ ب = ه د = ٢ سم ،

ب ه = ٢ سم ، ه د = ٥ سم ،

أثبت أن: أ ه < و د

٧) فو الشكل المقابل:



أ ب = و د ، ب و < و د

أثبت أن: أ ه < و د

٨) فو الشكل المقابل:



أ ب = ٤ سم ، ب و = ٥ سم ، و د = ٤ سم ، د ه = ٥ سم

أثبت أن: أ ه < ب و

٩) فو الشكل المقابل:



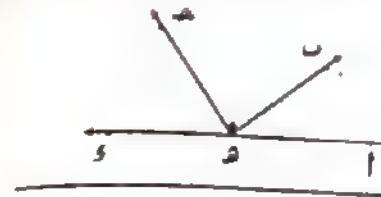
أ ب < و د

أثبت أن: أ ه < ب و



١٥) فو الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \angle (د ه و) &= 150^\circ \\ \angle (د ا ه) &= 120^\circ \\ \angle (د ب ه) &= 90^\circ \end{aligned}$$



اثبت أن : $\angle (د ا ب) > \angle (د ه و)$

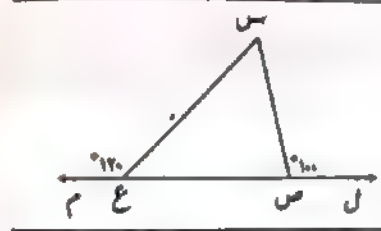
١٦) فو الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \angle (د ب و) &< \angle (د ا ه) \\ \text{اثبت أن : } \angle (د ا ب) &< \angle (د ب و) \end{aligned}$$



١٧) فو الشكل المقابل :

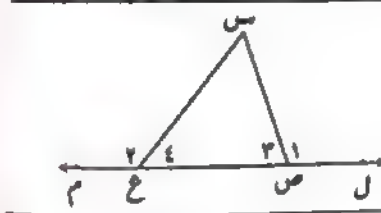
$$\begin{aligned} \angle (د س ع م) &= 120^\circ \\ \angle (د ل س س) &= 90^\circ \end{aligned}$$



اثبت أن : $\angle (د س ع م) > \angle (د س ع ل)$

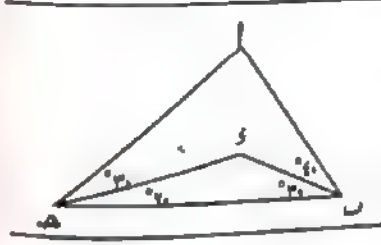
١٨) فو الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \angle (د ا ب) &> \angle (د ب و) \\ \text{اثبت أن : } \angle (د ا ب) &< \angle (د ب و) \end{aligned}$$



١٩) فو الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \angle (د ب ه) &= 30^\circ, \angle (د و ب) = 40^\circ \\ \angle (د ا ب) &= 40^\circ, \angle (د ا ه) = 30^\circ \end{aligned}$$



اثبت أن : $\angle (د ا ب) < \angle (د ا ه)$

٢٠) فو الشكل المقابل :

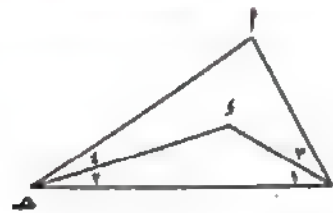
$$\begin{aligned} \angle (د ب و) &< \angle (د ا ب) \\ \angle (د ا ب) &< \angle (د ب و) \end{aligned}$$



اثبت أن : $\angle (د ا ب) < \angle (د ا ه)$

١٦) فو الشكل المقابل :

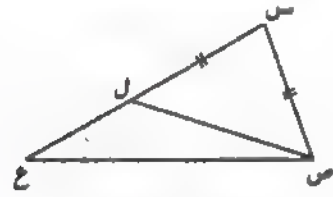
$$\begin{aligned} \angle (د ب و) &= (١٥)^\circ \\ \angle (د ا ب) &= (٤٥)^\circ \\ \angle (د ا ب) &< \angle (د ب و) \end{aligned}$$



اثبت أن : $\angle (د ا ب) < \angle (د ا ه)$

١٧) فو الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \angle (د س ل) &= \angle (د س م) \\ \text{اثبت أن : } \angle (د س ع م) &< \angle (د س ع ل) \end{aligned}$$



اثبت أن : $\angle (د س ع م) < \angle (د س ع ل)$

١٨) فو الشكل المقابل :

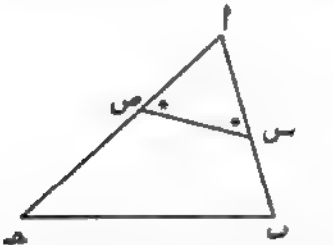
$$\begin{aligned} \angle (د ا ب) &< \angle (د ب و) \\ \angle (د ب و) &= \angle (د ا ه) \end{aligned}$$



اثبت أن : $\angle (د ا ب) < \angle (د ب و)$

١٩) فو الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \angle (د ب ه) &= \angle (د ا ب) \\ \angle (د ا ب) &= \angle (د ب و) \\ \angle (د ا ب) &= \angle (د ب و) \end{aligned}$$



اثبت أن : $\angle (د ب ه) < \angle (د ب و)$

٢٠) ا ب ه د فيه $\angle (د ا ب) = \angle (د ب و)$ اثبت أن : $\angle (د ا ب) < \angle (د ب و)$

اثبت أن : $\angle (د ا ب) < \angle (د ب و)$



مسائل المتفوقين

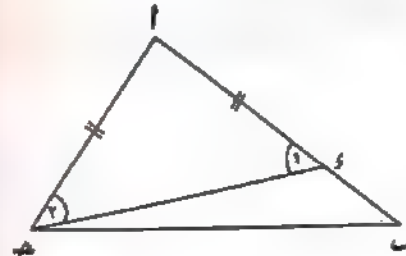
٢١) إذا كانت م نقطة داخل المثلث ا ب ه فاثبت أن : $\angle (د ا ب) < \angle (د ب و)$



المقارنة بين زوايا المثلث

نظرية

إذا اختلف طول ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول يقابله زاوية أكبر في القياس من قياس الزاوية المقابلة للآخر



المعطيات ΔABC فيه $AB < AC$
المطلوب $\angle C < \angle B$
العمل
البرهان
ناخذ D على AB بحيث $AD = AC$
 $\therefore \Delta ADC$ فيه $AD = AC$
 $\therefore \angle ADC = \angle ACD$
 $\therefore \angle ADC$ خارجة عن ΔABC
 $\therefore \angle ADC < \angle B$
 $\therefore \angle ACD < \angle B$
 $\therefore \angle C < \angle B$
 $\therefore \angle C < \angle B$

#

ملاحظات

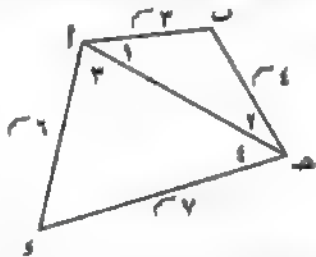
في ΔABC إذا كان AB الضلع الأكبر فإن $\angle C$ هي الزاوية الكبرى وهي الزاوية المقابلة لهذا الضلع (لاحظ أن الضلع الأكبر حروفه A, B وتكون الزاوية المقابلة هي الحرف الثالث للمثلث أي C) وإذا كان AC الضلع الأصغر تكون $\angle B$ هي الزاوية الصغرى



- أكبر زوايا المثلث في القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولاً
- وأصغر زوايا في القياس تقابل أصغر أضلاع المثلث طولاً
- نستخدم النظرية للمقارنة بين طول ضلعين في مثلث واحد

أمثلة توضيحية

في الشكل المقابل:



أب ح د شكل رباعي فيه
 $AB > AD$ ، $BC > DC$
 $\angle B > \angle D$

اثبت أن:
 $\angle B > \angle D$

الحل

المعطيات $AB > AD$ ، $BC > DC$ ، $\angle B > \angle D$
المطلوب $\angle B > \angle D$

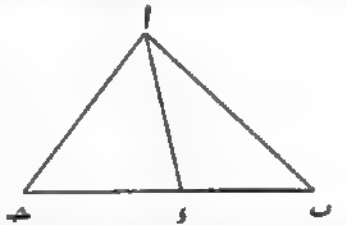
البرهان

في ΔABC $AB > AD$ $\therefore \angle ACB > \angle ACD$ (1)
في ΔBCD $BC > DC$ $\therefore \angle CBD > \angle CDB$ (2)

من (1)، (2) بالجمع $\angle ACB + \angle CBD > \angle ACD + \angle CDB$
 $\therefore \angle B > \angle D$

#

في الشكل المقابل:



أب ح د فيه
 $AD > AB$ ، $AC > AB$

اثبت أن:
 $\angle C > \angle B$

الحل



المعطيات
المطلوب
البرهان

∴ $\angle A < \angle D$ وفيه $\angle A < \angle D$

∴ $\angle A < \angle D$ و $\angle A < \angle D$ (1)

∴ $\angle B < \angle E$ وفيه $\angle B < \angle E$

∴ $\angle B < \angle E$ و $\angle B < \angle E$ (2)

بجمع (1)، (2) ينتج أن:

∴ $\angle A < \angle D$ و $\angle B < \angle E$ (3)

∴ $\angle A < \angle D$ و $\angle B < \angle E$

#

تدريب (2)

في الشكل المقابل:

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}$

$\angle M < 90^\circ$

أكمل ما يأتي لإثبات أن:

$\angle A < \angle D$ و $\angle B < \angle E$

المعطيات
المطلوب
البرهان

∴ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و \overline{AC} ، \overline{BD} قاطعتين لهما

∴ $\angle A < \angle D$ و $\angle B < \angle E$ (1) بالثبات

∴ $\angle A < \angle D$ و $\angle B < \angle E$ (2) بالثبات

∴ $\angle A < \angle D$ و $\angle B < \angle E$ (3) بالثبات

من (1)، (2)، (3) ينتج أن:

∴ $\angle A < \angle D$ و $\angle B < \angle E$

تمارين (7)

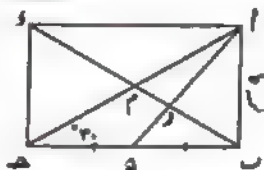
على المقارنة بين زوايا المثلث

أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

ساعة امتحان ومراجعة

اختبر نفسك

(1) في الشكل المقابل أكمل ما يأتي:



AB مستطيل ، M نقطة تقاطع قطريه ،

Q منتصف BC ، $\overline{AQ} \cap \overline{BD} = \{R\}$ ،

و $\angle AQR = 90^\circ$ ، $\angle BQR = 90^\circ$ ، $\angle CQR = 90^\circ$ ، $\angle DQR = 90^\circ$ ،

① $\angle AQR = \angle BQR$ ، $\angle BQR = \angle CQR$ ، $\angle CQR = \angle DQR$ ، $\angle DQR = \angle AQR$

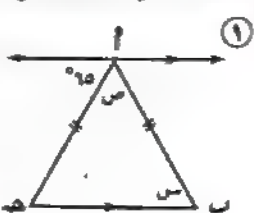
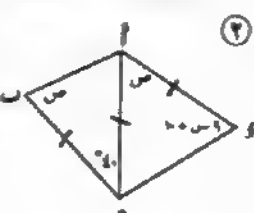
② $\angle AQR = \angle BQR$ ، محيط $\triangle AQR = \text{.....}$

③ $\angle AQR = \angle BQR$ ، $\angle BQR = \angle CQR$ ، $\angle CQR = \angle DQR$ ، $\angle DQR = \angle AQR$

④ عند محاور تماثل $\triangle AQR = \triangle BQR$ ، بينما $\triangle BQR = \triangle CQR$ و $\triangle CQR = \triangle DQR$ تماثل

برسنت

(ب) في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة $\angle S$ ، $\angle V$:



$\angle S = \text{.....}$ ، $\angle V = \text{.....}$

$\angle S = \text{.....}$ ، $\angle V = \text{.....}$

$\angle S = \text{.....}$ ، $\angle V = \text{.....}$

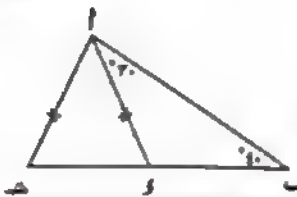
برسنت

(ج) في الشكل المقابل :

$\angle A = \angle D$ ، $\angle B = \angle E$ ، $\angle C = \angle F$

و $\angle A = \angle D$ ، $\angle B = \angle E$ ، $\angle C = \angle F$

اثبت أن $AB = DE$



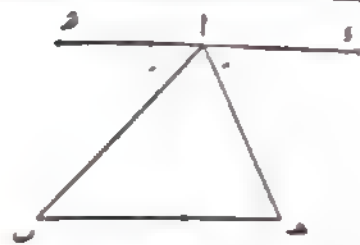
برسنت



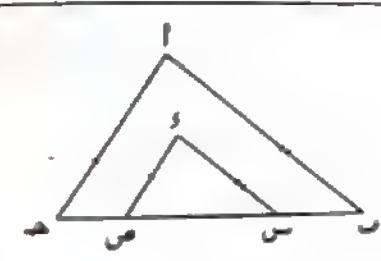
٩) فو الشكل المقابل،
 $AB \triangleq AC$ فيه $AB < AC$ ، $AD \parallel BC$
 $AD \parallel BC$
 أثبت أن
 $\angle ADB < \angle ADC$



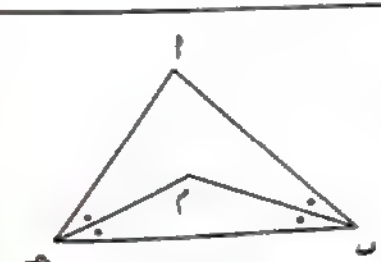
١٠) فو الشكل المقابل،
 $AB \triangleq AC$ فيه $AB < AC$ ،
 رسم $AD \parallel BC$ ويمر بنقطة A
 أثبت أن
 $\angle ADB < \angle ADC$



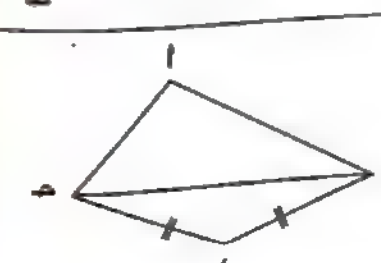
١١) فو الشكل المقابل،
 $AB \triangleq AC$ فيه $AB < AC$ ،
 $AD \parallel BC$ ، $AD \parallel BC$
 أثبت أن
 $\angle ADB < \angle ADC$



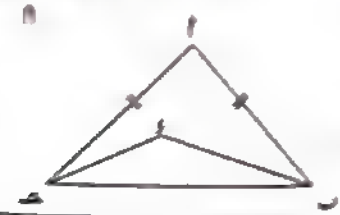
١٢) فو الشكل المقابل،
 $AB \triangleq AC$ ، مثلث ABC ينصف AD AB
 AD ينصف BC ، AD ينصف BC AB
 أثبت أن
 $\angle ADB < \angle ADC$



١٣) فو الشكل المقابل،
 $AB \triangleq AC$ فيه $AB < AC$ ،
 $AD \parallel BC$ ، $AD \parallel BC$
 أثبت أن
 $\angle ADB < \angle ADC$



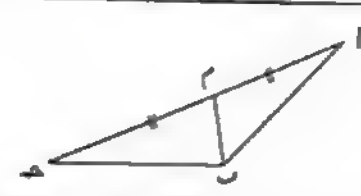
١٤) فو الشكل المقابل،
 $AB \triangleq AC$ فيه $AB < AC$ ،
 نقطة داخل المثلث بحيث $AD < AC$
 أثبت أن
 $\angle ADB < \angle ADC$



١٥) $AB \triangleq AC$ فيه $AB < AC$ ، $AD \parallel BC$ بحيث $AD \parallel BC$ ، $AD \parallel BC$
 أثبت أن $\angle ADB < \angle ADC$

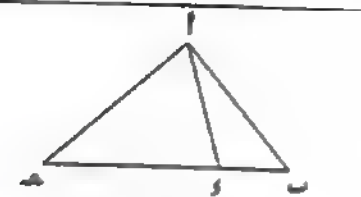
١٦) $AB \triangleq AC$ فيه $AB < AC$ ، $AD \parallel BC$ بحيث $AD \parallel BC$ ، $AD \parallel BC$
 أثبت أن $\angle ADB < \angle ADC$

١٧) $AB \triangleq AC$ فيه $AB < AC$ ، $AD \parallel BC$ بحيث $AD \parallel BC$ ، $AD \parallel BC$
 أثبت أن $\angle ADB < \angle ADC$

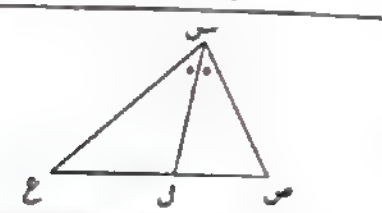


١٨) فو الشكل المقابل،
 $AB \triangleq AC$ فيه $AB < AC$ ،
 $AD \parallel BC$ ، $AD \parallel BC$
 أثبت أن $\angle ADB < \angle ADC$

١٩) $AB \triangleq AC$ فيه $AB < AC$ ، $AD \parallel BC$ بحيث $AD \parallel BC$ ، $AD \parallel BC$
 أثبت أن $\angle ADB < \angle ADC$



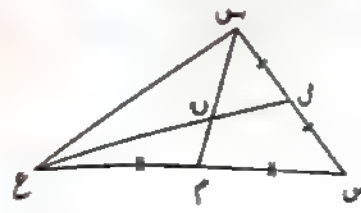
٢٠) فو الشكل المقابل،
 $AB \triangleq AC$ فيه $AB < AC$ ،
 $AD \parallel BC$ ، $AD \parallel BC$
 أثبت أن $\angle ADB < \angle ADC$



٢١) فو الشكل المقابل،
 $AB \triangleq AC$ فيه $AB < AC$ ،
 $AD \parallel BC$ ، $AD \parallel BC$
 أثبت أن $\angle ADB < \angle ADC$

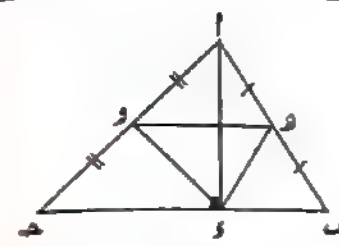


٢٢) فو الشكل المقابل:



س م ع Δ فيه التوسطن س م ، ع ل
مقاطعان في ل ، ل < م
اثبت أن:
ق (د س ع) < ق (د ل م)

٢٣) فو الشكل المقابل:

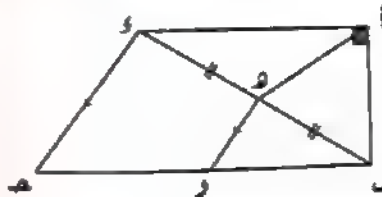


ا ب هـ Δ فيه ا ب < ا هـ ،
أو ا ب هـ تقطعها في و ،
م منتصف ا ب ، و منتصف ا هـ
اثبت أن: ق (د و هـ) < ق (د و ب)

٢٤) ا ب هـ و مستطيل ، هـ د أو يحيث هـ د < هـ و

اثبت أن: ق (د هـ و) < ق (د هـ ا)

٢٥) فو الشكل المقابل:



ا ب هـ و شكل رباعي فيه ق (د) = ٩٠° ،
هـ منتصف ب د ، هـ و // هـ د
ويقطع هـ د في و ، ا هـ < هـ و
اثبت أن: ق (د هـ) < ق (د و هـ)

مسائل المتفوقين

٢٦) ا ب هـ Δ فيه ا د متوسط فـ إذا كان ا د = ٣ ، ب هـ = ٤
فأثبت أن: ا د حادة

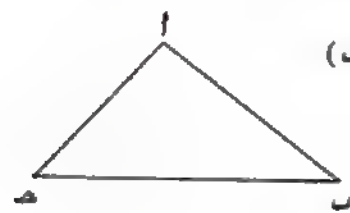
٢٧) ا ب هـ و متوازي أضلاع فيه ا هـ < ب و اثبت أن د ب متفرجة

٢٨) ا ب هـ و شكل رباعي فيه هـ د // ا ب ، ق (د هـ) < ق (د ا ب)
اثبت أن: ق (د ا ب) < ق (د و ب هـ)

المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث

نظرية

إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول من الذي يقابل الأخرى



المعطيات Δ ا ب هـ فيه ق (د هـ) < ق (د ب)

المطلوب اثبات أن ا ب < ا هـ

البرهان :: ا ب ، ا هـ قطع مستقيمة

:: يجب أن نتحقق إحدى الحالات التالية:

- ١) ا ب > ا هـ
- ٢) ا ب = ا هـ
- ٣) ا ب < ا هـ

إذا لم تكن ا ب < ا هـ

فإما ا ب = ا هـ أو ا ب > ا هـ

إذا كان ا ب = ا هـ فإن ق (د هـ) = ق (د ب)

وهذا يخالف المعطيات حيث أن ق (د هـ) < ق (د ب)

وإذا كان ا ب > ا هـ فإن ق (د هـ) > ق (د ب) حسب النظرية السابقة

وهذا يخالف المعطيات حيث أن ق (د هـ) < ق (د ب)

:: يجب أن يكون ا ب < ا هـ

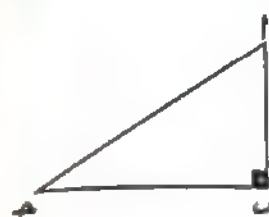
ملاحظة

تستخدم النظرية للمقارنة بين قياسا زاويتين في مثلث واحد



نتيجة

في المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث



فمثلاً: في ΔABC القائم الزاوية في C تكون زاوية B لها أكبر قياس لأنها قائمة، $\angle A$ ، $\angle B$ حادتين أي أن $\angle C > \angle B$ و $\angle C > \angle A$ وبالتالي يكون أكبر ضلع هو AB وهو المقابل للزاوية القائمة أي أن $AB > BC$ ، $AB > AC$

ملاحظة

في المثلث المنفرج الزاوية يكون الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أطول أضلاع المثلث

نتيجة

طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أي قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم



فمثلاً: إذا كانت A نقطة خارج المستقيم BC ورسمنا القطعة المستقيمة AD عمودية على BC ورسمنا قطع مستقيمة أخرى مثل AB ، AC ، AE ، AF

نلاحظ أن: ΔABC وتكون AD وتر في هذا المثلث وبالمثل $AD > AB$ ، $AD > AC$ ، $AD > AE$ أي أن طول AD أصغر من طول أي قطعة أخرى مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم BC

تعريف

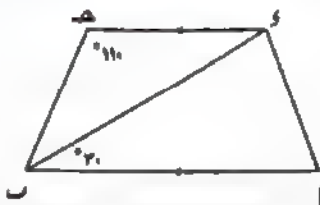
بعد أي نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم

فمثلاً: بعد النقطة A عن المستقيم BC في الشكل السابق هو طول AD



أمثلة توضيحية

في الشكل المقابل:



AB هو شكل رباعي فيه $AB \parallel DC$ ،
و $\angle B = 110^\circ$ ، $\angle D = 30^\circ$
أثبت أن: $AC < AD$

الحل

$AB \parallel DC$

$$\angle B = 110^\circ \text{ و } \angle D = 30^\circ$$

$$AC < AD$$

$$\because AB \parallel DC \text{، } \overrightarrow{AC} \text{ قاطع لهما، و } \angle B = 110^\circ$$

$$\therefore \angle B = 110^\circ \text{ و } \angle D = 30^\circ \text{ بالتبادل}$$

$$\because \text{مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية} = 180^\circ$$

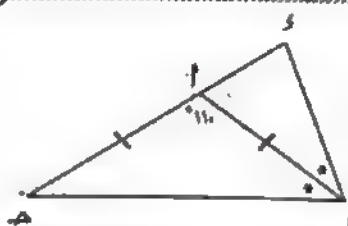
$$\therefore \angle B = 110^\circ \text{ و } \angle D = 30^\circ \text{ و } \angle C = 40^\circ$$

$$\therefore \angle B = 110^\circ \text{ و } \angle D = 30^\circ$$

$$AC < AD$$

#

في الشكل المقابل:



$AB = AC$ ، D ينصف BC و $AD \perp BC$
ويقطع BC في D و $\angle B = 110^\circ$
أثبت أن: $AD < AB$

الحل

$$AB = AC \text{، } D \text{ ينصف } BC \text{ و } \angle B = 110^\circ$$

$$AD < AB$$





على المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث

تعاريف (٨)

ساعة استن و مراجعة

أولاً: راجع معنا و اختبر نفسك

١) أكمل ما يأتي:

- ١) منتصف زاوية الرأس في Δ متساوي الساقين يكون
- ٢) إذا كان قياس زاوية خارجة لمثلث متساوي الساقين يساوي 120° فإن المثلث
- ٣) محور تماثل القطعة المستقيمة هو
- ٤) في Δ ABC إذا كان $\angle C = 30^\circ$ و $\angle B = 90^\circ$ فإن $AC = \dots$ و $BC = \dots$

درجات

(ب) في الشكل المقابل:

$$AB = AC, \angle A = 40^\circ, \angle B = 70^\circ$$

$$D$$
 منتصف BC و E

$$F$$
 منتصف AC و G

اثبتان: ١) $DE \parallel BC$ و $EF \parallel AC$

٢) $DF \parallel AB$ و $DE \parallel AC$



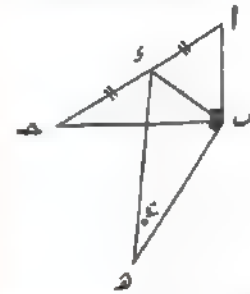
(ج) في الشكل المقابل:

$$\angle A = 40^\circ, \angle B = 70^\circ, \angle C = 90^\circ$$

$$D$$
 منتصف AB و E

$$F$$
 منتصف AC و G

اثبتان: $DE \parallel AC$ و $EF \parallel AB$

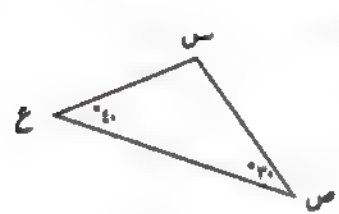


درجات

ثانياً: اجب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

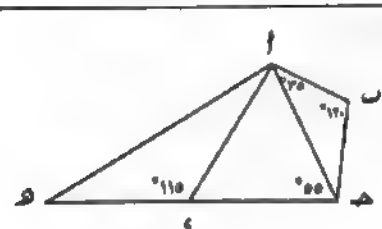
٢) في كل من الأشكال الآتية اكمل باستخدام $< >$:



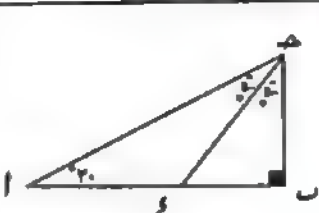
س ع
ع س
س ع



أ ب
أ ب
أ ب



س ع
ع س
س ع
ع س



أ ب
أ ب
أ ب
أ ب

٣) Δ ABC فيه $\angle A = 40^\circ$ ، $\angle B = 80^\circ$ ، $\angle C = 90^\circ$

وتم أطوال أضلاع المثلث تصاعدياً

٤) Δ ABC فيه $\angle A = 40^\circ$ ، $\angle B = 70^\circ$ ، $\angle C = 90^\circ$

وتم أطوال أضلاع المثلث AB متنازلياً



5) اكمل ما ياتو:

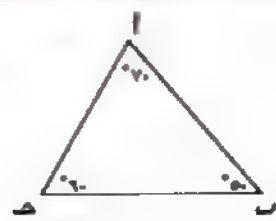
- 1) في Δ ا ب ج اذا كان \angle (د) = 90° ، \angle (ب) = 70° فإن \angle ا ب <
 2) في Δ انقلسم الزاوية اكبر الاضلاع طويلاً هو
 3) اذا كان Δ ا ب ج منفرج الزاوية في ا فإن اكبر اضلاعه طويلاً هو
 4) اذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس
 5) اذا كان Δ س م ع فيه س م = 7 ، م ع = 6 ، س ع = 5 فإن أصغر زوايا Δ الداخلة في القياس هي
 6) القربعد بين المستقيم وأي نقطة خارجه عنه هو
 7) في Δ ا ب ج اذا كان \angle (د) < \angle (ب) فإن <
 8) أصغر زوايا المثلث قياساً يقابلها
 9) في Δ ا ب ج اذا كان \angle (د) = 130° فإن أكبر الاضلاع طويلاً هو

6) اتمر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس:

- 1) في Δ ا ب ج اذا كان \angle (د) = 90° فإن ا ب ا ج
 [< > = <]
 2) في Δ ا ب ج اذا كان ا ب = ا ج ، \angle (د) = 90° فإن
 [ا ب < ا ج = ا ج > ا ب < ا ج > ا ب]
 3) الوتر في المثلث انقلسم الزاوية اضلاعه طويلاً
 [أكبر < أصغر < يساوي أحد < أكبر من اويساوي أحد]
 4) في Δ س م ع اذا كان \angle (د) < \angle (ب) فإن س م ع م ع
 [< > = <]
 5) في Δ ا ب ج اذا كان ا ب = ا ج ، \angle (د) = 40° فإن ب ج ا ج
 [< > = <]
 6) اذا كان ا ب ج فيه \angle (د) = 90° ، \angle (ب) = 40° فإن أصغر الاضلاع طويلاً هو
 [ا ب < ب ج < ا ج < ا ج < ا ج < ا ج]
 7) في Δ ا ب ج اذا كان \angle (د) = 130° ، \angle (ب) = 40° فإن أكبر الاضلاع طويلاً
 [ا ب < ب ج < ا ج < ا ج < ا ج < ا ج]

7) فوالشكل المقابل:

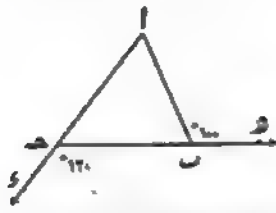
- 1) \angle (د) = 70° ،
 2) \angle (ب) = 50° ،
 3) \angle (ج) = 60°



رتب اضلاع المثلث تصاعدياً وتنازلياً حسب اطوالهم

8) فوالشكل المقابل:

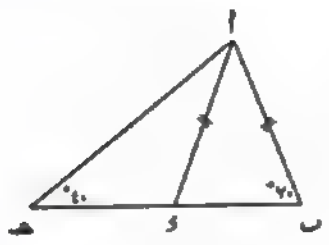
- 1) ا ب ج ، د ه و ، ا ب ج ، د ه و ،
 2) \angle (د) = 130° ، \angle (ب) = 70° ،
 3) ا ب ج ، ا ب ج ، ا ب ج



مسائل المستوى الثاني

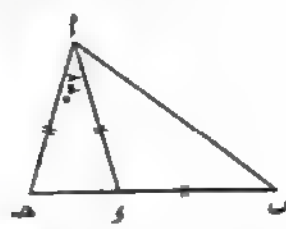
9) فوالشكل المقابل:

- 1) ا ب ج فيه
 2) \angle (د) = 70° ، \angle (ب) = 40° ،
 3) د ه و بحيث ا ب = ا ج
 4) ا ب ج ، ا ب ج ، ا ب ج



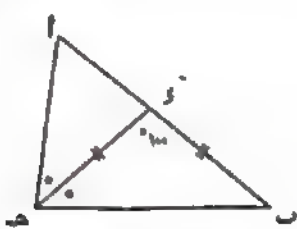
10) فوالشكل المقابل:

- 1) ا ب ج ، د ه و ، ا ب ج ،
 2) بحيث ا د = ا ه = ا ج ،
 3) \angle (د) = 42° ،
 4) ا ب ج ، ا ب ج ، ا ب ج



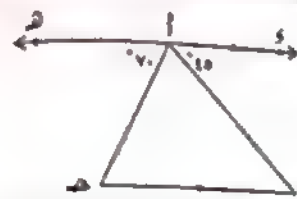
11) فوالشكل المقابل:

- 1) ا ب ج مثلث ، د ه و ينصف د ه ،
 2) ويقطع ا ب في و ، و د ه ،
 3) \angle (د) = 100° ،
 4) ا ب ج ، ا ب ج ، ا ب ج





١٢) فوالشكل المقابل:



أ ب ح د ، د ع // د ب

ن (د ب ا ب) = ٩٠° ، ن (د ب ح د) = ٩٠°

أثبت أن: د ب > د ح

١٣) فوالشكل المقابل:



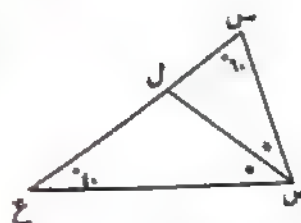
أ ب ح د شكل رباعي فيه

د ب // د ح ، د ب > د ح

ن (د ب ا ب) = ٩٠° ، ن (د ب ح د) = ٩٠°

أثبت أن: د ب < د ح

١٤) فوالشكل المقابل:



س م ع د فيه ن (د س) = ٩٠°

ن (د ع) = ٩٠° ، ن (د س ع) بحيث

س م ينصف د س م ع

أثبت أن: ل ع < ل س

١٥) فوالشكل المقابل:



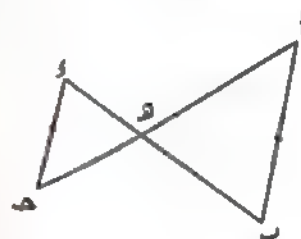
أ ب ح د شكل رباعي فيه

ن (د ب) = ٩٠° ، ن (د ح) = ٩٠°

ن (د ب) = ٨٠° ، ن (د ح) = ٨٠°

أثبت أن: د ب < د ح

١٦) فوالشكل المقابل:



أ ب // د ح

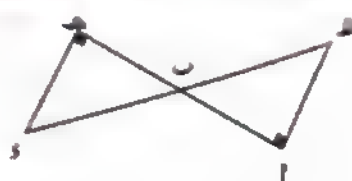
أ ب ح د = { د }

د < د ب

أثبت أن: د ب < د ح



١٧) فوالشكل المقابل:



أ ب ح د = { د }

ن (د ب) = ٩٠° ، ن (د ح) = ٩٠°

أثبت أن: د ب < د ح

١٨) فوالشكل المقابل:



أ ب ح د مثلث

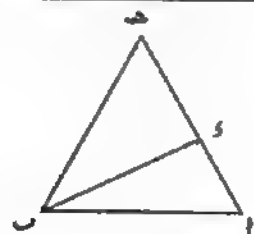
د ب ح حيث د ب = د ح

أثبت أن: د ب < د ح

١٩) أ ب ح د مثلث قائم الزاوية في ب ، د ب ح حيث د ب = د ح

أثبت أن: ن (د ب ح د) < ن (د ح د د)

٢٠) فوالشكل المقابل:



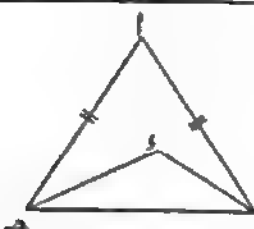
أ ب ح د فيه

د ب = د ح

د ب ح

أثبت أن: د ب < د ح

٢١) فوالشكل المقابل:



أ ب ح د مثلث فيه

أ ب = د ح ، د نقطة داخلية بحيث

ن (د ب ح د) > ن (د ح د د)

أثبت أن: د ب < د ح

٢٢) فوالشكل المقابل:



أ ب ح د مثلث

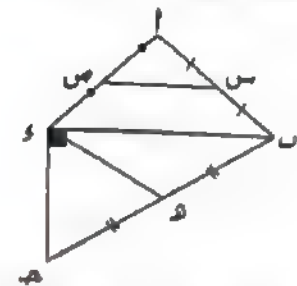
منفرد الزاوية في ب

د ب // د ح

أثبت أن: د ب < د ح



٢٣ **أ ب هـ مثلث ، هـ منتصف د هـ ، هـ \cap آ ب = { و }**
اثبت أن ب هـ < ب و



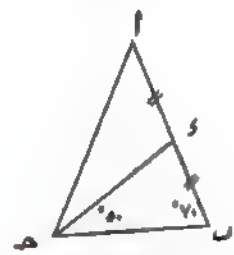
٢٤ **في الشكل المقابل ،**
أ ب هـ د شكل رباعي فيه
س ، ص ، هـ منتصفات
آ ب ، آ و ، ب هـ على الترتيب
و (د ب و هـ) = ٩٠°
اثبت أن ، و هـ < س س

٢٥ **أ ب هـ مثلث فيه أ ب = أ هـ ، س \in آ هـ رسم س س يقطع آ ب في ص**
ويقطع هـ ت في ع اثبت أن ، اس < اس



٢٦ **في الشكل المقابل ،**
أ ب هـ د متوازي أضلاع فيه
و (د و هـ ا) < و (ا د هـ ب)
اثبت أن ، ا و < ا ب

مسائل المتفوقين



٢٧ **في الشكل المقابل ،**
د منتصف آ ب ، و (د ب) = ٧٠° ،
و (د و هـ ب) = ٥٠°
اثبت أن ١ و (ا د) < و (ا د هـ و)
٢ و ا د هـ ب حادة

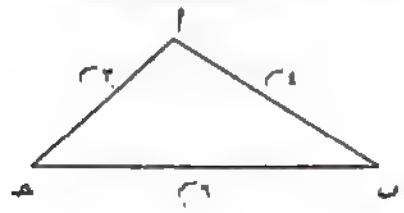
٢٨ **أ ب هـ د في هـ و (ا د) = ٢ س - ١ ، و (د ب) = ٣ س - ٢ ،**
و (د هـ) = ٥ س + ٣ حيث جميع القياسات بالدرجات فأثبت أن ، ا هـ < ب هـ

٢٩ **أ ب هـ د قائم الزاوية في ب ، و \in آ ب ، هـ منتصف آ هـ ، د منتصف و هـ**
اثبت أن ، ١ ب هـ < ب و ٢ ب و < هـ و

متباينة المثلث

حقيقة

في أي مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث



ففى Δ أ ب هـ يكون :
 أ ب + أ هـ < ب هـ
 أ ب + ب هـ < أ هـ
 أ ب + ب هـ < أ هـ
 أ ب + ب هـ < أ هـ

أى أن $أ ب + ب هـ < أ هـ < أ ب - ب هـ$

١ **أو من هذه الأعداد يصلح أطوالاً لأضلاع مثلث**
 ٤٤٧٤٢ ١ ٣٤٨٤٥ ٢ ٨٤٦٤٣ ٣ ٥٤٥٤٥ ٤

الحل

لعرفة الأعداد التى تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث نجمع طولى أصغر ضلعين وإذا كان مجموعهما أكبر من طول الضلع الثالث فإن الأعداد تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث وإذا كانت أصغر من أو تساوى طول الضلع الثالث ففى هذه الحالة لا تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث

- ٤٤٧٤٢ ١ لا تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث (لأن ٧ > ٤ + ٢)
- ٣٤٨٤٥ ٢ لا تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث (لأن ٨ = ٣ + ٥)
- ٨٤٦٤٣ ٣ تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث
- ٥٤٥٤٥ ٤ تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث متساوى الأضلاع



ثانياً: اجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

أكمل ما يأتي :

- 1) في أي مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين
- 2) في Δ AB AC يكون $AB + AC$ BC .
- 3) إذا كان $AB = 4$ $AC = 9$ طولاً ضلعين في مثلث فإن أصغر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث =
- 4) إذا كان $AB = 5$ $AC = 8$ طولاً ضلعين في مثلث فإن أكبر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث =
- 5) إذا كان طولاً ضلعين في مثلث متساوي الساقين هما $AB = 5$ $AC = 10$ فإن طول الضلع الثالث =
- 6) إذا كان طولاً ضلعين في مثلث $AB = 7$ $AC = 4$ فإن الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث هي

3) اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

- 1) الأعداد 5، 5، 5 تصلح أن تكون أطوالاً أضلاع مثلث
[متساوي الساقين ، مختلف الأضلاع ، متساوي الأضلاع ، لا تصلح أضلاع مثلث]
- 2) الأعداد 5، 5، 15 تصلح أن تكون أطوالاً أضلاع مثلث
[متساوي الساقين ، مختلف الأضلاع ، متساوي الأضلاع ، لا تصلح أضلاع مثلث]
- 3) طول أى ضلع في مثلث مجموع طولى الضلعين الآخرين
[$a < b < c$ ، $a > b < c$ ، $a = b = c$ ، ضعف]
- 4) مثلث به ضلعان طولهما 7، 5، يمكن أن يكون طول الضلع الثالث
[11 ، 12 ، 13 ، 14]
- 5) في أي مثلث AB AC نجد أن AB $BC - AC$
[$a < b < c$ ، $a > b < c$ ، $a = b = c$ ، ضعف]
- 6) الأطوال 2، 3، 6 تصلح أن تكون أطوالاً أضلاع مثلث إذا كانت BC =
[صفر ، 1 ، 2 ، 4]
- 7) مثلث له محور تماثل واحد وطولاً ضلعين فيه 3، 6، فإن محيطه =
[3 ، 9 ، 15 ، 12]



4) أو من هذه الأعداد تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث مع ذكر السبب ؟

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| 1) 5، 4، 2 | 2) 7، 5، 3 | 3) 4، 8، 3 |
| 4) 6، 6، 6 | 5) 13، 7، 6 | 6) 11، 6، 4 |
| 7) 6، 3، 12 | 8) 7، 14، 7 | 9) 5، 9، 5 |

5) أوجد الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث لكل من المثلثات التالية

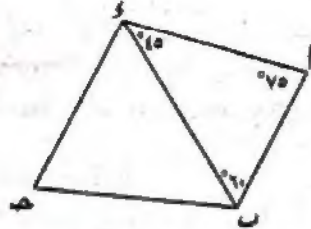
إذا كان طولاً الضلعين الآخرين هما :

- | | | |
|----------|------------|---------|
| 1) 9، 6 | 2) 12، 5 | 3) 6، 5 |
| 4) 10، 2 | 5) 3، 2، 9 | 6) 4، 4 |

6) إذا كان طولاً ضلعين في مثلث متساوي الساقين 5، 12، فما هو طول الضلع الثالث ؟ اذكر السبب

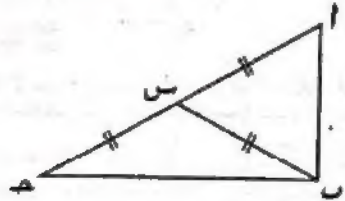
مسائل المستوى الثاني

7) في الشكل المقابل :



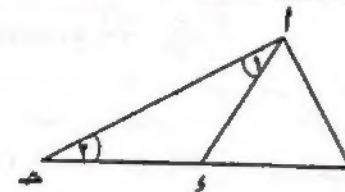
- AB BC CD DA شكل رباعي فيه
 $\angle BAC = 40^\circ$
 $\angle CAD = 70^\circ$
 $\angle B = 60^\circ$
 $\angle D = 40^\circ$
 أثبت أن $AB + BC < AD$

8) في الشكل المقابل :



- AB BC CA فيه
 DE منتصف AB ،
 DE BC AC
 أثبت أن $AB < AC$

9) في الشكل المقابل :



- AB BC CA فيه DE BC
 بحيث $\angle B = 120^\circ$ $\angle C = 20^\circ$
 أثبت أن $AB < AC$



اختبارات (٤)

اختبارات مراجعة على ما سبق

نموذج (١)

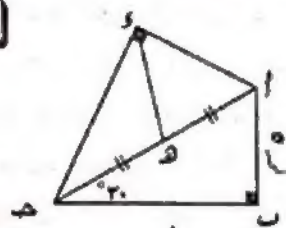
٣٠

اختبار مراجعة على ما سبق

١ أكمل ما يأتي:

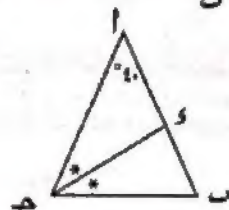
- ١ إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول تقابله
- ٢ محاور تماثل المثلث التساوي الساقين هو المستقيم
- ٣ في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة 50° فإن قياس زاوية الرأس =
- ٤ أ ب هـ Δ فيه $\angle (أ ب) = 55^\circ$ ، $\angle (ب د) = 70^\circ$ فإن عدد محاور التماثل له =

٢ (١) في الشكل المقابل:



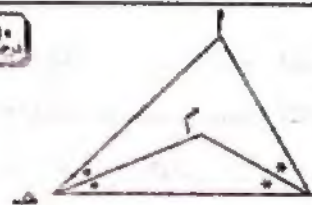
أ ب هـ د شكل رباعي فيه
 $\angle (ب د) = \angle (د هـ) = 90^\circ$
 $أ ب = 3$ ، $ب د = 4$ ، $د هـ = 1$
 هـ منتصف أ ب أوجد طول د هـ

(ب) في الشكل المقابل:



أ ب هـ Δ فيه $أ ب = أ هـ$ ،
 هـ منتصف ب د
 أوجد $\angle (أ د هـ)$

٢ في الشكل المقابل:



أ ب هـ مثلث، ب م منتصف أ ب هـ
 م منتصف أ ب هـ، $أ م < ب م$
 أثبت أن: $\angle (أ ب هـ) < \angle (أ ب م)$

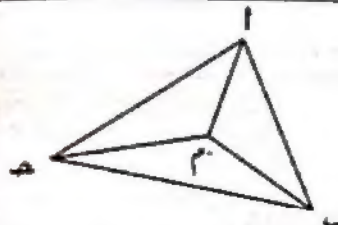


مسائل المتشوقين

١٦ إذا كان أ ب هـ مثلث حاد الزوايا فأثبت أن: $أ ب < أ هـ + ب هـ$

١٧ أثبت أنه في أي شكل رباعي يكون محيطه < مجموع طولي قطريه

١٢ في الشكل المقابل:

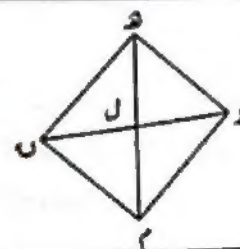


أ ب هـ مثلث، م نقطة داخلية
 أثبت أن:

$$أ م + ب م + ج م < \frac{1}{2} \text{ محيط المثلث أ ب هـ}$$

١٣ برون أن طول أي ضلع في المثلث أصغر من نصف محيط المثلث

١٤ في الشكل المقابل:



هـ و م ن شكل رباعي فيه
 $\{ن\} = \{م\}$
 أثبت أن:

$$أ ب + ب ج + ج د + د أ < \text{محيط الشكل هـ و م ن}$$

١٥ أ ب هـ Δ ، رسم أ د يقطع ب هـ في د أثبت أن: $أ ب + ب د < أ د + د هـ$



نموذج (٢)

اختبار مراجعة على ما سبق

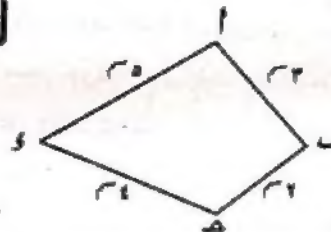
درجات

١ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

- ١ إذا كان قياس إحدى زوايا Δ قائم الزاوية 45° كان المثلث
 [متساوي الأضلاع ، متساوي الساقين ، مختلف الأضلاع ، متطابق الزوايا]
 ٢ إذا كان Δ AB له محور تماثل واحد فيه $\angle A = 120^\circ$ فإن $\angle B = \dots\dots\dots$
 [30° ، 40° ، 60° ، 120°]

درجات

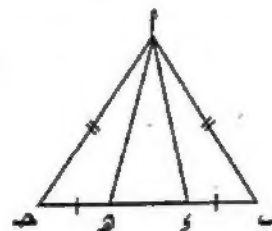
٢ في الشكل المقابل :



AB و CD شكل رباعي فيه
 $AB = 2$ ، $BC = 3$ ، $CD = 4$ ، $DA = 5$
 أثبت أن : $\angle A < \angle C$

درجات

٣ في الشكل المقابل :



AB و AC مثلث فيه $AB = AC$
 D و E نقطتان على AB و AC بحيث $AD = AE$
 أثبت أن : $DE \parallel BC$

نموذج (٣)

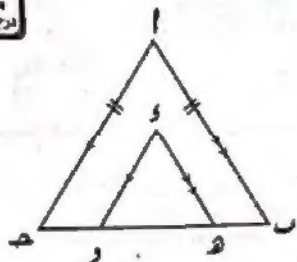
اختبار مراجعة على ما سبق

درجات

١ أكمل ما يأتي :

- ١ طول متوسط Δ الخارج من رأس القائمة يساوي
 ٢ منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين
 ٣ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها من جهة القاعدة بنسبة
 ٤ مجموع طولى أى ضلعين في مثلث طول الضلع الثالث

٢ (١) في الشكل المقابل :

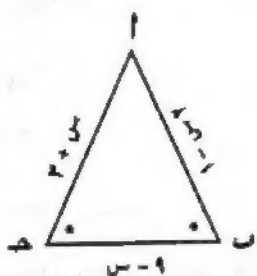


$AB = 5$ ،
 $BC = 5$ ،
 $AC = 5$

أثبت أن $\angle A = \angle B = \angle C$

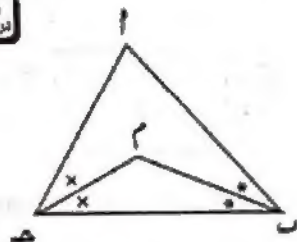
٢ $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

(ب) في الشكل المقابل :



$AB = 3$ ، $BC = 4$ ، $AC = 5$
 $\angle A = 90^\circ$ ، $\angle B = 60^\circ$ ، $\angle C = 30^\circ$
 أوجد محيط ΔABC علماً بأن :
 $AB = 3$ ، $BC = 4$ ، $AC = 5$
 $\angle A = 90^\circ$ ، $\angle B = 60^\circ$ ، $\angle C = 30^\circ$
 $AB = 3$ ، $BC = 4$ ، $AC = 5$

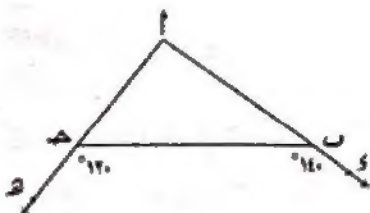
٣ (١) في الشكل المقابل :



AB و AC مثلث
 D و E نقطتان على AB و AC بحيث $AD = AE$
 أثبت أن : $DE \parallel BC$

برهن أن $\angle A = \angle B = \angle C$

(ب) في الشكل المقابل :



$AB = 3$ ، $BC = 4$ ، $AC = 5$
 $\angle A = 90^\circ$ ، $\angle B = 60^\circ$ ، $\angle C = 30^\circ$
 أوجد محيط ΔABC علماً بأن :
 $AB = 3$ ، $BC = 4$ ، $AC = 5$
 $\angle A = 90^\circ$ ، $\angle B = 60^\circ$ ، $\angle C = 30^\circ$
 $AB = 3$ ، $BC = 4$ ، $AC = 5$